

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a \quad f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \log_{a^r} b = \frac{1}{r} \log_a b$$

$$\log_a b^r = r \log_a b \quad \sin x = a; \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \quad 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = p \cdot r$$

$$\operatorname{tg} x = a; \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n$$

DOMINIO MATEMÁTICO



EDUCA - PLUS
EDITORIAL ACADÉMICA



Septiembre 2026 – Educa Plus Editorial Académica

Copyright © Educa Plus Editorial Académica

Copyright del texto © 2026 de Autores

Ecuador, Naranjito, Cod. Post. 091803

Email: editor@redsa.ec

Contacto: +593 960 838 709

<https://biblioteca.redsa.ec/>

Datos Técnicos de Publicación Internacional
Título: Dominio matemático
Autores: Pintado Calva, A. M., Cumbal Toapanta, P. S., Cóndor Pérez, P. G., Quevedo Castro, E. A.
Diseño y producción editorial: Durán Sánchez, Stephany
Editor: Barco Acosta, Jonathan
Formato: PDF
Páginas: 95
Tamaño: A4 21x29.7cm
Modo de acceso: Recurso digital disponible en línea
ISBN: 978-9907-9571-6-7
DOI: https://doi.org/10.66646/educa-plus/09sep2612
Prefijo Editorial ISBN: 978-9907-9571

Este libro fue sometido a arbitraje académico bajo el sistema de evaluación por pares doble ciego (double-blind peer review).

Disponible para su descarga gratuita en <https://biblioteca.redsa.ec/>



EDITORIAL



Disponible para su descarga gratuita en <https://biblioteca.redsa.ec/>

Los contenidos de este libro pueden ser descargados, reproducidos, difundidos e impresos con fines de estudio, investigación y docencia, o para su utilización en productos o servicios no comerciales, siempre que se reconozca adecuadamente a los autores como fuente y titulares de los derechos de propiedad intelectual, sin que ello implique en modo alguno que aprueban las opiniones, productos o servicios resultantes. En el caso de contenidos que indiquen expresamente que proceden de terceros, deberán dirigirse a la fuente original indicada para gestionar los permisos correspondientes.

Cómo citar esta obra

Pintado Calva, A. M., Cumbal Toapanta, P. S., Córdor Pérez, P. G., Quevedo Castro, E. A. (2026). Dominio matemático. Educa Plus Editorial Académica. <https://doi.org/10.66646/educa-plus/09sep2612>

Proceso Editorial:

Cada uno de los textos publicados por **Educa Plus Editorial Académica** ha sido sometido a un riguroso proceso de **evaluación por pares doble ciego externos** (*double-blind peer review*), conforme a los estándares editoriales internacionales y a la normativa interna de la editorial.

Aviso Legal:

La información presentada, así como el contenido, fotografías, gráficos, cuadros, tablas y referencias de este manuscrito, es de exclusiva responsabilidad del/los autor/es y no refleja necesariamente el pensamiento ni la posición institucional de la **Educa Plus Editorial Académica**. Las opiniones expresadas en cada capítulo son responsabilidad exclusiva de sus respectivos autores.

Derechos de Autor ©

Este documento se publica bajo los términos y condiciones de la licencia:

Creative Commons Reconocimiento — No Comercial — Compartir Igual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)

Usted es libre de compartir y adaptar el material, siempre que otorgue el crédito correspondiente, no lo utilice con fines comerciales y distribuya sus contribuciones bajo la misma licencia.

Para ver una copia de esta licencia, visite: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es>



CONTENIDO

Introducción	7
--------------	---

Capítulo 1	8
-------------------	----------

ÁLGEBRA Y FUNCIONES

1.1.	Estándares de aprendizaje y DCD	9
1.2.	Técnicas de factorización	12
1.3.	Ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita	15
1.4.	OPERACIONES CON INTERVALOS	20
1.5.	Matrices reales de $M \times N$, operaciones elementales	22
1.6.	Operaciones con matrices	23
1.7.	Sistemas de ecuaciones lineales	26
1.8.	Ejercicios Resueltos	29
1.9.	Funciones reales	31
1.10.	Ejercicio tipo Ser Bachiller	31
1.11.	Función cuadrática	32
1.12.	Ejercicios Resueltos	32
1.13.	Función cúbica	34
1.14.	Ejercicios tipo Ser Bachiller	35
1.15.	Funciones Trigonométricas	35
1.16.	Gráfica de las funciones trigonométricas	36
1.17.	Ejercicios Resueltos	37
1.18.	Función exponencial y función logarítmica	38
1.19.	Progresiones aritméticas y geométricas	40
1.20.	Progresiones geométricas	42

Capítulo 2	44
-------------------	-----------

GEOMETRÍA Y MEDIDA

2.1.	Estándares de aprendizaje y DCD	45
2.2.	Vectores geométricos en el plano	46
2.3.	Formas de expresión de un vector	46
2.4.	Transformación de las formas de expresión de vectores	46
2.5.	Operaciones con vectores	48
2.6.	Propiedades de la suma de vectores	48
2.7.	Diferencia de vectores	48
2.8.	Multiplicación de un escalar por un vector	49
2.9.	Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector	49
2.10.	Ejercicios Resueltos	49
2.11.	El espacio vectorial R^2 : Rectas en R^2	50

2.12.	Relación entre líneas rectas	52
2.13.	Ejercicios Resueltos	52
2.14.	Aplicaciones geométricas en R2: Curvas planas en R2	53
2.15.	La circunferencia con centro en el origen (0,0)	53
2.16.	La circunferencia con centro en un punto (h,k)	54
2.17.	Ecuación en forma general de la circunferencia	54
2.18.	Ejercicio Resuelto	55
2.19.	LA PARÁBOLA	56
2.20.	La parábola con el vértice en el origen (0,0)	56
2.21.	La parábola con vértice en el punto	57
2.22.	Ejercicios Resueltos	57
2.23.	La Elipse	59
2.24.	Elipse con centro en el origen (0,0)	60
2.25.	Elipse con el centro en un punto (h,k)	60
2.26.	Ejercicio Resuelto	60
2.27.	La hipérbola	61
2.28.	Hipérbola con centro en el origen (0,0)	61
2.29.	Hipérbola con el centro en un punto (h,k)	62
2.30.	Ejercicio Resuelto	62
2.31.	Programación lineal	64
2.32.	Ejercicios Resueltos	64

Capítulo 3 68

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

3.1.	ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA	69
3.2.	Tipos de variables	69
3.3.	Distribución de frecuencias	69
3.4.	Medidas de tendencia central	69
3.5.	Varianza y desviación estándar	70
3.6.	Ejercicios Resueltos	70
3.7.	Probabilidad Elemental	73
3.8.	Conceptos básicos	73
3.9.	Probabilidad clásica	73
3.10.	Ejercicios Resueltos	73

Anexos	76
--------	----

Referencias Bibliograficas	88
----------------------------	----

Autores	90
---------	----

INTRODUCCIÓN

El presente texto, ha sido estructurado con el fin de facilitar a los estudiantes, la lectura y comprensión de las temáticas que se evalúan en los exámenes de ingreso a la educación superior, con conceptos básicos, aplicación y resolución de problemas, que guardan similitud en la estructura de sus enunciados con ejercicios que ya han sido aplicados.

El texto está dividido en 3 capítulos, de acuerdo con los Grupos Temáticos que indica el INEVAL, mismo que contienen tópicos específicos; cada tópico incluye un grupo de ejercicios para la resolución del estudiante, donde deberá aplicar conocimientos adquiridos, con el objetivo de desarrollar habilidades y destrezas para posteriormente consolidar sus conocimientos en cada uno de los temas, y efectivamente mejorar su desempeño en la evaluación.

Mis más sinceros agradecimientos a los docentes de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales, Matemática Y Física; de la Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación, de la Universidad Central del Ecuador; quienes con sus críticas constructivas han hecho posible la mejora de este documento que tiene como objetivo nivelar y mejorar conocimientos básicos en los estudiantes que rendirán las evaluaciones de ingreso a la educación superior en futuros períodos.

La obra va dirigida con todo respeto, pues por el hecho de ser humanos no está exenta de errores.

Autores.

CAPÍTULO 1

Álgebra y funciones

1.1. Estándares de aprendizaje y DCD

Grupo Temático	Estándar de Aprendizaje	Destrezas con Criterio de Desempeño a Evaluar
Álgebra y Funciones	E.M.5.1. Emplea conceptos básicos de las propiedades algebraicas de los números reales para optimizar procesos, realizar simplificaciones y resolver ecuaciones, inecuaciones y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas aplicando varios métodos y las propiedades de orden de los en contextos reales e hipotéticos.	M.5.1.1. Aplicar las propiedades algebraicas de los números reales en la resolución de productos notables y en la factorización de expresiones algebraicas.
		M.5.1.2. Deducir propiedades algebraicas de la potenciación de números reales con exponentes enteros en la simplificación de expresiones numéricas y algebraicas.
		M.5.1.5. Identificar la intersección gráfica de dos rectas como solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
		M.5.1.6. Resolver analíticamente sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando diferentes métodos (igualación, sustitución, eliminación).
		M.5.1.7. Aplicar las propiedades de orden de los números reales para realizar operaciones con intervalos (unión, intersección, diferencia y complemento), de manera gráfica (en la recta numérica) y de manera analítica.
	E.M.5.2. Resuelve sistemas de ecuaciones 3x3 aplicando varios métodos, descompone funciones racionales en fracciones parciales, opera con matrices cuadradas y de orden y calcula la matriz inversa en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.	M.5.1.14. Reconocer el conjunto de matrices y sus elementos, así como las matrices especiales: nula e identidad.
		M.5.1.15. Realizar las operaciones de adición y producto entre matrices, producto de escalares por matrices, potencias de matrices, aplicando las propiedades de números reales.
		M.5.1.16. Calcular el producto de una matriz de por un vector en el plano y analizar su resultado (vector y no matriz).

E.M.5.3. Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para resolver situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan representarse mediante modelos matemáticos. Verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.	M.5.1.17. Reconocer matrices reales de $n \times m$ e identificar las operaciones que son posibles de realizar entre ellas según sus dimensiones.
	M.5.1.23. Reconocer funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas para calcular la función inversa (de funciones biyectivas) comprobando con la composición de funciones.
	M.5.1.27. Resolver ecuaciones que se pueden reducir a ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
	M.5.1.30. Resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas: una de primer grado y una de segundo grado; y sistemas de dos ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas, de forma analítica.
	M.5.1.31. Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones, reales o hipotéticas, que pueden ser modelizados con funciones cuadráticas, identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos.
	M.5.1.34. Interpretar de manera geométrica (pendiente de la secante) y física el cociente incremental (velocidad media) de funciones cuadráticas, con apoyo de las TIC.
	M.5.1.44. Determinar el dominio, rango, ceros, paridad, monotonía, extremos y asíntotas de funciones racionales con cocientes de polinomios de grado n con apoyo de las TIC
	M.5.1.72. Reconocer las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente), sus propiedades y las relaciones existentes entre estas funciones y representarlas de manera gráfica con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets).

	E.M.5.4. Reconoce patrones presentes en sucesiones numéricas reales, monótonas y definidas por recurrencia, opera con sucesiones numéricas reales, aplica progresiones, propiedades y fórmulas en la resolución de problemas reales o hipotéticos relacionados a la matemática financiera y asocia el concepto de convergencia con el límite de una sucesión.	M.5.1.74. Reconocer y graficar funciones exponenciales analizando sus características: monotonía, concavidad y comportamiento al infinito. M.5.1.75. Reconocer la función logarítmica como la función inversa de la función exponencial para calcular el logaritmo de un número y graficarla analizando esta relación para determinar sus características M.5.1.77. Aplicar las propiedades de los exponentes y los logaritmos para resolver ecuaciones e inecuaciones con funciones exponenciales y logarítmicas, con ayuda de las TIC. M.5.1.78. Reconocer y resolver aplicaciones, problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones exponenciales o logarítmicas, identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas, y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos. M.5.1.53. Identificar sucesiones numéricas reales, sucesiones monótonas y sucesiones definidas por recurrencia a partir de las fórmulas que las definen. M.5.1.54. Reconocer y calcular uno o varios parámetros de una progresión (aritmética o geométrica) conocidos otros parámetros. M.5.1.55. Aplicar los conocimientos sobre progresiones aritméticas, progresiones geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas para resolver aplicaciones, en general y de manera especial en el ámbito financiero, de las sucesiones numéricas reales. M.5.1.56. Resolver ejercicios numéricos y problemas con la aplicación de las progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas
--	---	--

		M.5.1.58. Emplear progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas en el planteamiento y resolución de problemas de diferentes ámbitos.
--	--	---

Nota 1 DCD Destrezas con Criterio de Desempeño

Fuente 1 Currículo de los niveles de educación obligatoria (MINEDUC, 2019) y Estándares de aprendizaje (MINEDUC, 2016)

ELABORADO POR: Pintado C. Andrea M.

1.2. Técnicas de factorización

Factorización: Expresión algebraica que se le da a la descomposición de dos o más factores.

Casos de factorización.

Nombre	Definición	Forma	Ejemplo
Factor común	Si en cada término del polinomio existe un factor común este será igual al mismo factor multiplicado por el polinomio resultante de dividir cada término entre el factor común.	$ma + mb + mc$ $= m(a + b + c)$	$3x^2y + 12xy^2 - 21xy$ $= 3xy(x + 4y - 7)$
Factor común por agrupamiento	Si los términos de un polinomio pueden ser agrupados, y al factorizar cada grupo tiene un factor común, será igual al producto entre el factor común y el polinomio resultante de dividir cada término entre el factor común.	$ac + bc + ad + bd$ $= (ac + bc) + (ad + bd)$ $= c(a + b) + d(a + b)$ $= (a + b)(c + d)$	$18ax - 2by - 9ay + 4bx$ $= (18ax - 9ay) + (4bx - 2by)$ $= 9a(2x - y) + 2b(2x - y)$ $= (2x - y)(9a + 2b)$
Trinomio cuadrados perfectos	Si dos de sus términos son cuadrados y el tercero es el doble producto de las bases de esos cuadrados, será igual a la suma o diferencia del cuadrado de un binomio.	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$	$81x^2 + 90xy + 25y^2 = (9x + 5y)^2$ $16x^2 - 56xy + 49y^2 = (4x - 7y)^2$

Diferencia de cuadrados	La diferencia de dos términos al cuadrado se descompone en el producto de la suma por la diferencia de las bases de los cuadrados	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$	$(2x + y - 8z)^2 - (x - 5y + 3z)^2$ $= (2x + y - 8z + x - 5y + 3z)(2x + y - 8z - x + 5y - 3z)$ $= (3x - 4y - 5z)(x + 6y - 11z)$
Trinomio cuadrado perfecto incompleto	Si el polinomio puede ser convertido en un trinomio cuadrado perfecto por medio de la adición y sustracción de un término conveniente.	$a^4 + a^2b^2 + b^4$ $= a^4 + a^2b^2 + b^4 + a^2b^2 - a^2b^2$ $= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$ $= (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2$ $= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$	$25x^4 + 6x^2y^2 + y^4$ $= 25x^4 + 6x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2$ $= 25x^4 + 10x^2y^2 + y^4 - 4x^2y^2$ $= (5x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2$ $= (5x^2 + 2xy + y^2)(5x^2 - 2xy + y^2)$
Trinomio de la forma $x^2 + px + q$	La descomposición del trinomio en el producto de dos binomios donde el primer término será la raíz del término, el signo del primer binomio será el mismo del término y el signo del segundo término será la multiplicación de los signos de p y q . Para el segundo valor de los binomios se considera q	$x^2 + px + q$ $= x^2 + (a + b)x + ab$ $= (x + a)(x + b)$	$a^2 + 2ab - 63b^2$ $= (a + 9b)(a - 7b)$
Trinomio de la forma $mx^2 + px + q$	Cuando el se encuentre precedido por un coeficiente diferente de 1, será igual a la multiplicación y división del coeficiente, considerando a como un solo símbolo se descompone el numerador como en el caso	$mx^2 + px + q$ $= \frac{(mx)^2 + p(mx) + mq}{m}$	$4x^2 + 11x + 7$ $= \frac{(4x)^2 + 11(4x) + 28}{4}$ $= \frac{(4x + 7)(4x + 4)}{4}$ $= \frac{(4x + 7)4(x + 1)}{4}$ $= (4x + 7)(x + 1)$

Suma de potencias de exponente impar	La suma de dos potencias con el mismo exponente (n, impar), es igual a la suma de sus bases que multiplica a un polinomio homogéneo (n-1), y sus signos van (+,-) alternadamente.	$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$	$x^9 + 125y^3 = (x^3 + 5y)(x^6 - 5x^3y + 25y^2)$																														
Diferencia de potencias de exponente impar	La diferencia de dos potencias con el mismo exponente (n, impar o par), es igual a la diferencia de sus bases que multiplica a un polinomio homogéneo (n-1), y sus signos van (+)	$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$	$x^3 - 8y^3 = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$																														
Polinomio que contienen factores de la forma	Si es divisible para un binomio de la forma , el valor de debe ser un divisor de Entonces en una división exacta, el término del dividendo es igual al producto del cociente por el divisor.	$kx^3 + mx^2 + nx + p$	$x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>-5</td><td>1</td><td>-6</td><td></td></tr><tr><td></td><td>2</td><td>6</td><td>2</td><td>6</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td></td><td>-3</td><td>0</td><td>-3</td><td>-3</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td></td><td></td></tr></table> $(x^2 + 1)(x - 2)(x + 3)$	1	1	-5	1	-6			2	6	2	6	2	1	3	1	3	0			-3	0	-3	-3		1	0	1	0		
1	1	-5	1	-6																													
	2	6	2	6	2																												
1	3	1	3	0																													
	-3	0	-3	-3																													
1	0	1	0																														

1.2.1. Ejercicios Resueltos

1. Determine la descomposición de factores de la expresión algebraica.

$$x^5 + a^2x^3 + 27x^2 + 27a^2$$

- a) $(x + a)(x - a)(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
b) $(x + a)(x - a)(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$
c) $(x^2 + a^2)(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
d) $(x^2 + a^2)(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

Solución

$$\begin{aligned}
 &x^5 + a^2x^3 + 27x^2 + 27a^2 \\
 &= (x^5 + a^2x^3) + (27x^2 + 27a^2) \\
 &= x^3(x^2 + a^2) + 27(x^2 + a^2) \\
 &= (x^2 + a^2)(x^3 + 27) \\
 &= (x^2 + a^2)(x + 3)(x^2 - 3x + 9)
 \end{aligned}$$

Nota 2 $\square (x^2 + a^2)$, No es una diferencia de cuadrados, es un distractor en las respuestas.

2. En un laboratorio, se analizan ondas parabólicas mismas que se definen así:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 + 5x - 24 \\
 g(x) &= x^2 - 7x + 12
 \end{aligned}$$

Determine la función cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$, que permite analizar la onda como función.

a) $\frac{(x+8)}{(x+4)}$

b) $\frac{(x+8)}{(x-4)}$

c) $\frac{(x-8)}{(x+4)}$

d) $\frac{(x-8)}{(x-4)}$

Solución

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 5x - 24}{x^2 - 7x + 12}$$

$$= \frac{(x+8)(x-3)}{(x-4)(x-3)}$$

$$= \frac{(x+8)}{(x-4)}$$

Nota 3 Para el numerador y denominador se usa el trinomio de la forma x^2+px+q , la ley de signos es un distractor

1.2.2. Ejercicios propuestos

3. Encontrar el área del círculo central de una cancha de fútbol, si el radio es metros.

- a) $(25x^2 + 169)\pi$
- b) $25x^2\pi - 130x\pi + 169\pi$
- c) $(25x - 130x + 169)\pi$
- d) $5x\pi - 13\pi$

4. La arista de un cubo es , hallar el valor de su volumen.

- a) $216x^3 - 125$
- b) $18x^3 - 15$
- c) $216x^3 - 540x^2 + 225x + 125$
- d) $216 - 540x + 225x^2 + 125x^3$

5. Encuentre la descomposición factorial de la siguiente expresión algebraica:

- a) $(x+a)(x+2)(x^2-2y+4)$
- b) $(x+a)(x-2)(x^2-2y+4)$
- c) $(x+a)(x+2)(x^2+2y-4)$
- d) $(x+a)(x-2)(x^2+2y-4)$

1.3. Ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita

Ecuación: Es la igualdad entre dos expresiones algebraicas, que cumple para determinados valores de las incógnitas es decir, consiste en encontrar el valor/es que toma la variable para que se cumpla la igualdad.

Primer grado	Segundo grado
$ax + b = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$
Donde:	Donde:
x : incógnita	x : incógnita
a y b : coeficientes	a , b y c : coeficientes
$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$	a, b y $c \in \mathbb{R}$
	ax^2 : Término cuadrático
	bx : Término Lineal
	c : Término Independiente
Solución: despejar x	Solución:
$ax + b = 0$	1. Técnicas de Factorización
$ax = -b$	2. Fórmula de Bhaskara
$x = -\frac{b}{a}$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

1.3.1. Problemas con ecuaciones

Expresión Coloquial	Simbología Matemática
Un número	x
El doble de un número	$2x$
El quíntuplo de un número	$5x$
Ocho veces el número	$8x$
El número aumentado en 3	$x+3$
El número disminuido en 2	$x-2$
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$
La tercera parte de un número	$\frac{x}{3}$
Los dos tercios de un número	$\frac{2x}{3}$
Un séptimo más del número	$\frac{8x}{7}$
El cuadrado de un número	x^2
La suma de dos números	$x+y$
La diferencia de dos números	$x-y$
El producto de dos números	$x \cdot y$
La razón de dos números	$\frac{x}{y}$

1.3.2. Propiedades de la Potenciación

Propiedad	Forma simbólica
Potencia del exponente 1	$a^1 = a$
Potencia del exponente 0	$a^0 = 1$ si $a \neq 0$
Multiplicación de potencias de igual base	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
División de potencias de igual base	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
Multiplicación de potencias de igual exponente	$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
División de potencias de igual exponente	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
Potencia de una potencia	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

1.3.3. Propiedades de los Logaritmos

PROPIEDAD	PROPOSICIÓN	FORMA SIMBÓLICA
logaritmo de la base	El logaritmo de la base siempre es 1 por que $a^1 = 1$	$\log_a a = 1$
logaritmo de uno	El logaritmo de 1 es siempre por que $a^0 = 1$, $a \neq 0$	$\log_a 1 = 0$
logaritmo de un producto	Es igual a la suma de los logaritmos de sus factores	$\log_a(M * N) = \log_a M + \log_a N$
logaritmo de un cociente	Es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor	$\log_a(M/N) = \log_a M - \log_a N$
logaritmo de una potencia	Es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de la potencia	$\log_a M^K = K \log_a M$
logaritmo de una raíz	Es igual al logaritmo del radical dividido para el índice del radical	$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$
logaritmo de base y argumento igual	Es igual al exponente del argumento	$\log_a a^k = k$

1.3.4. Ejercicios Resueltos

Un joven al terminar un mes de trabajo gasta un cuarto de su sueldo en video juegos, de lo que sobra gasta un cuarto en alimentación. Quedándole finalmente USD 144, ¿Cuánto dinero tenía antes de gastarlo?

- a) 153 USD
- b) 144 USD
- c) 256 USD
- d) 243 USD

Solución

$x = \text{dinero originalmente}$

$\frac{x}{4} = \text{dinero de videojuegos}$

$$x - \frac{x}{4} = \frac{3x}{4}$$

Como dice lo que sobra, gasta $\frac{1}{4}$ en alimentación se tiene:

$$\frac{3x}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{3x}{4} \right) = 144$$

$$\frac{3x}{4} - \frac{3x}{16} = 144$$

$$\frac{12x - 3x}{16} = 144$$

$$9x = 144 * 16$$

$$x = \frac{144 * 16}{9}$$

$$x = 256$$

Nota 4 Que habla de dos eventos. Y el segundo depende de la solución del primero (compra de videojuegos)

Un diseñador de moda compra telas adquiriendo determinada cantidad de metros de tela con USD 45. Medita y piensa: “si hubiera tenido USD 25 más, podría comprar 10 metros más de tela”. ¿Cuántos metros de tela compro el diseñador?

a) 15 m

b) 16 m

c) 17 m

d) 18 m

Solución

$x = \text{número de metros de tela}$

$$\frac{45}{x} = \frac{\text{Precio}}{\text{metro de tela}}$$

Si hubiera tenido los 25 USD mas

$$\frac{70}{x + 10} = \frac{\text{Precio}}{\text{metro de tela}}$$

$$\frac{\text{Precio}}{\text{metro de tela}} = \frac{\text{Precio}}{\text{metro de tela}}$$

$$\frac{45}{x} = \frac{70}{x + 10}$$

$$45(x + 10) = 70x$$

$$45x + 450 = 70x$$

$$25x = 450$$

$$x = \frac{450}{25}$$

$$x = 18$$

Nota 5 Hay que tener en cuenta que todo el tiempo, permaneció el precio por metro de tela, por eso se hace la igualación.

En la UCE, durante una práctica de laboratorio de física se desea crear un modelo matemático que facilite el cálculo de la aceleración de un móvil. Tomando los siguientes datos, velocidad final, velocidad inicial y se desplaza en una trayectoria rectilínea. Determinar el modelo que representa la aceleración a , que facilite la práctica de laboratorio.

Solución

Recordar la ecuación

$$V_f^2 = V_o^2 + 2a \Delta x$$

Reemplazar los datos

$$(x + 6)^2 = (x - 4)^2 + 2a (3)$$

Factorar (Cuadrado de un Binomio)

$$(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36$$

$$(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

$$x^2 + 12x + 36 = x^2 - 8x + 16 + 6a$$

Despejar el valor de a

$$x^2 - x^2 + 12x + 8x = 16 - 36 + 6a$$

$$20x = -20 + 6a$$

$$20x + 20 = 6a$$

$$\frac{20}{6}x + \frac{20}{6} = a$$

Simplificar

$$\frac{10}{3}x + \frac{10}{3} = a$$

a) $\frac{10}{3}x + \frac{10}{3} = a$

b) $\frac{10}{3}x - \frac{10}{3} = a$

c) $\frac{3}{10}x + \frac{3}{10} = a$

d) $\frac{3}{10}x - \frac{3}{10} = a$

Nota 6 Es necesario conocer la ecuación: $V_f^2 = V_o^2 + 2a \Delta x$, y la factorización del cuadrado de un binomio.

El restaurante TOKIO entrega pedidos a domicilio en motocicleta, preocupada por el consumo de gasolina, realiza un estudio planteando una fórmula para encontrar los kilómetros Km recorridos en función del costo de la gasolina X en dólares, de tal forma que se obtuvo: $Km = 7x^2 + 7x$.

Si quien hace las entregas recorre 294 Km al día, ¿Cuánto dinero gasta en gasolina?

Solución

$$\begin{aligned} Km &= 7x^2 + 7x \\ 294 &= 7x^2 + 7x \\ 7x^2 + 7x - 294 &= 0 \end{aligned}$$

a. 2 dólares

b. 6 dólares

c. 7 dólares

d. 4 dólares

Dividir a toda la expresión para 7

$$x^2 + x - 42 = 0$$

Se obtuvo un trinomio cuadrado

$$\begin{aligned} x^2 + x - 42 &= (x + 7)(x - 6) \\ \text{entonces} \\ x &= -7 \text{ y } x = 6 \end{aligned}$$

Nota 7 El valor de -7 no se lo toma como un número real.

1.3.5. Ejercicios propuestos

CONFITECA, una empresa dedicada a la elaboración de productos de confitería tiene que su primer lote es de x unidades, el segundo x+3, y el tercero x+6. Si el total de sus productos corresponde a la suma del doble de unidades del último lote más 6, determine las unidades del primer lote.+}

a) 3 unidades

b) 9 unidades

c) 21 unidades

d) 27 unidades

Un otavaleño dueño de un almacén de ponchos ha modelado la utilidad diaria (y) con la ecuación:, donde x es el número de ponchos vendidos e (y) representa los dólares. ¿Cuántos ponchos deben de venderse en un día para que la utilidad sea de 88 dólares?

a) 30 ponchos

b) 24 ponchos

c) 51 ponchos

d) 6 ponchos

Pedro, tiene 12 años más que Sofía, pero dentro de 10 años su edad será únicamente el doble. ¿Cuál es la suma actual de las edades de los dos niños?

a) 75

b) 50

c) 38

d) 16

1.4. OPERACIONES CON INTERVALOS

Intervalo: Es el conjunto de números reales que se encuentran comprendidos entre dos cualesquiera de sus elementos, que pueden estar o no en dicho conjunto.

1.4.1. Notación de intervalos

Nombre	Símbolo	Significado	Representación
Intervalo Abierto	(a, b)	$\{x / a < x < b\}$	
Intervalo cerrado	$[a, b]$	$\{x / a \leq x \leq b\}$	
Intervalo semiabierto	$(a, b]$	$\{x / a < x \leq b\}$	
	$[a, b)$	$\{x / a \leq x < b\}$	
Semirrecta	$(-\infty, a)$	$\{x / x < a\}$	
	$(-\infty, a]$	$\{x / x \leq a\}$	
	(a, ∞)	$\{x / a < x\}$	
	$[a, \infty)$	$\{x / a \leq x\}$	

1.4.2. Operaciones entre intervalos

NOMBRE	SÍMBOLO	SIGNIFICADO	EJEMPLIFICACIÓN Si $A = [a, c)$, $B = [b, d]$
Unión	$A \cup B$	$\{x / x \in A \vee x \in B\}$	 Sol. $[a; d]$
Intersección	$A \cap B$	$\{x / x \in A \wedge x \in B\}$	 Sol. $[b; c)$
Diferencia	$A - B$	$\{x / x \in A \wedge x \notin B\}$	 Sol. $[a; b)$
	$B - A$	$\{x / x \in B \wedge x \notin A\}$	 Sol. $[c; d]$
Complemento	A'	$\{x / x \notin A \wedge x \in \mathcal{U}\}$	 Sol. $(-\infty; a) \cup [c; +\infty)$
Diferencia Simétrica	$A \Delta B$	$\{x / x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$	 Sol. $[a; b) \cup [c; d]$

1.4.3. Ejercicios Resueltos

La variación de la temperatura en las faldas del estratovolcán Cotopaxi presenta los siguientes resultados en °C:

Durante el mes de julio fue de $[-8;2)$

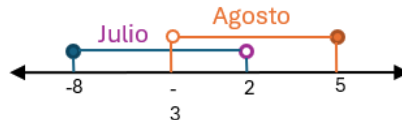
Durante el mes de agosto fue de $(-3;5]$

Si se considera que el rango $[-8;-3]$, este hace referencia a la, con los datos recopilados

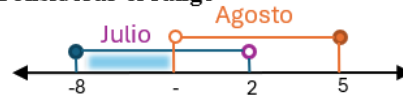
- a) Unión julio y agosto
- b) Intersección julio y agosto
- c) Resta julio y agosto
- d) Resta agosto julio

Solución

Graficar en la recta numérica, los intervalos de cada mes



Considerar el rango



Unión: $julio \cup agosto = [-8; 5]$

Intersección: $julio \cap agosto = (-3; 2)$

Resta: $julio - agosto = [-8; -3]$

Resta: $agosto - julio = [2; 5]$

En un laboratorio químico, se analizan dos tipos de bacterias, quienes deben de cumplir con determinadas temperaturas ambientales en T grados Celsius:

Bacteria de tipo A, $-5 < T \leq 3$ o $6 < T \leq 12$

Bacteria de tipo B, $-1 < T \leq 9$

Bajo que temperatura ambiental vivirán las bacterias de tipo A, mas no las de tipo B

- a) $(-5; -1] \cap (9; 12]$
- b) $(-5; -1] \cup (9; 12]$
- c) $(-5; -1) \cup [9; 12]$
- d) $(-5; 3] \cup (6; 12]$

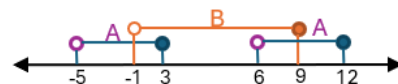
Solución

Se tiene las bacterias:

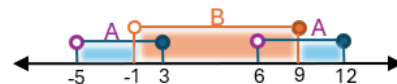
$A = [-5; 3] \cup (6; 12]$

$B = [-1; 9]$

Graficar



A-B



Sol. $(-5; -1] \cup (9; 12]$

1.4.4. Ejercicios propuestos

En una iglesia católica hay un grupo de jóvenes de edades desde los 12 a 25 años de edad. Si la iglesia recibe una invitación a una peregrinación, donde solo pueden participar jóvenes desde los 15 hasta los 35 años, ¿en qué intervalo estarán las edades de los jóvenes que pueden participar de la peregrinación?

- a) $[25;35]$
- b) $]12;15]$
- c) $[15;25]$
- d) $[12;35]$

Se sabe que para tener la consistencia de la melcocha se requiere que la temperatura de la azúcar este dentro de la expresión: , determinar el intervalo para mantener dicha consistencia, sabiendo que

- a) $[4;16]$
- b) $[4;8]$
- c) $[8;16]$
- d) $[0;2]$

Steffy, es docente de catedra de la materia de matemática en la Universidad Central del Ecuador ha notado que en el registro de asistencia hay un incremento de alumnos, y se dice que: la sexta parte de la cantidad de los alumnos, aumentada el doble de la tercera parte de dicha cantidad es mayor a la cantidad de alumnos disminuida en 5 estudiantes ¿Cuál es el intervalo que satisface la situación?

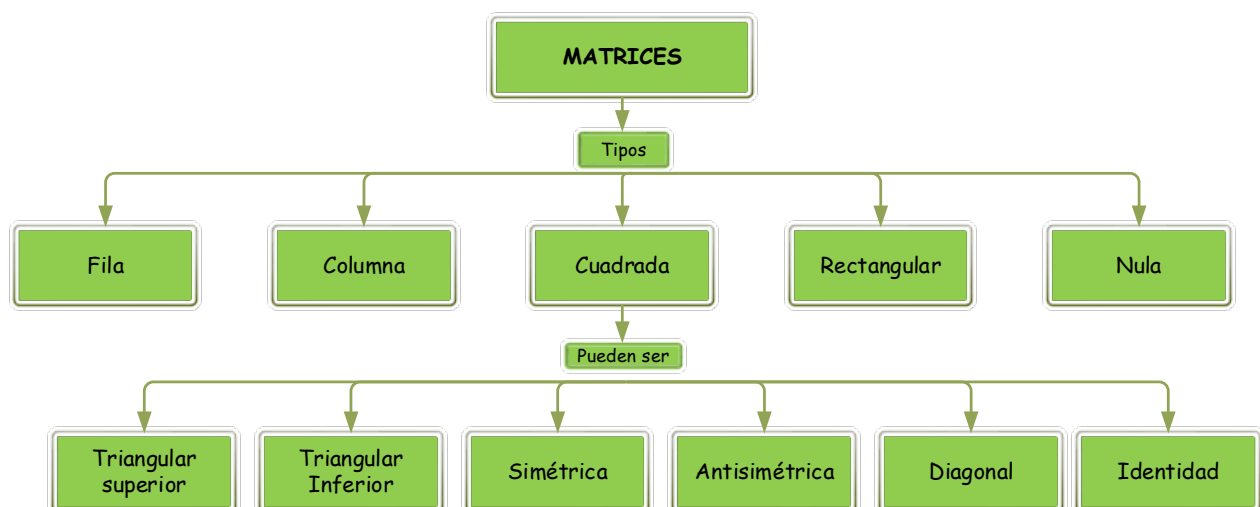
- a) $[-\infty; 30]$
- b) $[-\infty; 30]$
- c) $[30; \infty]$
- d) $[-10; 30]$

1.5. Matrices reales de $M \times N$, operaciones elementales

Matrices: es un conjunto ordenado de números reales estructurado en filas y columnas, con dimensión y se escribe de forma genérica de la siguiente manera

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ donde también } A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \\ j=1}}^m$$

Tipos de matrices



Ejemplos de tipos de matriz

Fila	Columna	Rectangular	Nula
$A = (2 \quad -1 \quad 4)$	$A = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz Cuadrada

Triangular superior	$A = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$	Triangular inferior	$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{pmatrix}$
Simétrica	$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 3 & 6 & -1 \\ 8 & -1 & 12 \end{pmatrix}$	Antisimétrica	$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$
Diagonal	$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	Identidad	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.6. Operaciones con matrices

1.6.1. Suma de matrices

Dos matrices del mismo orden $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ al sumarlas dan como resultado otra matriz $C = (c_{ij})$ del mismo orden, tal que $A + B = C$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices

Propiedad	Forma
Conmutativa	$A + B = B + A$
Asociativa	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Neutro aditivo	$A + 0 = 0 + A = A$
Inverso aditivo	$A + (-A) = 0$

1.6.2. Diferencia de matrices

Dos matrices del mismo orden $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ y al restarlas dan como resultado otra matriz $C = (c_{ij})$ del mismo orden, tal que $A - B = C$, o lo a su vez es la operación que resulta de sumar la primera matriz por la opuesta de la otra así, $A - B = A + (-B)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \dots & a_{nn} - b_{nn} \end{pmatrix}$$

1.6.3. Producto de un número por una matriz

Dada la matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ y un número real k , el producto $A \cdot k$ tiene por resultado otra matriz del mismo orden. cuyos elementos se obtuvieron de la multiplicación de k por cada uno de sus elementos $k \cdot A = (ka_{ij})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{n1} & k \cdot a_{n2} & \dots & k \cdot a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.6.4. Multiplicación de matrices

Dos matrices $A = (a_{m \times n})$ y $B = (b_{n \times p})$ y se pueden multiplicar siempre y cuando el número de columnas de A sea igual al número de filas de B . cada elemento de la matriz resultante se obtiene de la multiplicación de cada elemento de la fila de la matriz A por cada elemento de la columna de la matriz B y sumándolos.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ 5 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 5 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 5 \cdot 5 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 21 \\ 2 & 5 & 31 \\ 16 & 11 & 19 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la multiplicación de matrices

Propiedad	Forma
Asociativa	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Distributiva respecto de la suma	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
Asociativa respecto a la multiplicación por un número real k	$k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B$
Elemento neutro de la multiplicación	$A \cdot I_n = I_n \cdot A$ $I_n = \text{elemento neutro}$

1.6.5. Ejercicios Resueltos

Complete el enunciado.

Una matriz diagonal es aquella que cumple con la condición de ser y cuyos elementos situados de la diagonal principal son

- a) Cuadrada – dentro – ceros
- b) Cuadrada – fuera – ceros**
- c) Rectangular – dentro – unos
- d) Rectangular – fuera – unos

Solución

Ejemplo de matriz diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Nota 8 Una matriz diagonal, es una matriz cuadrada donde todos los elementos que se encuentran fuera de la diagonal son ceros.

En una fábrica de autos, se necesita variar la temperatura del horno de pintura, para lo cual es necesario variar los parámetros con el modelo.

$$R = \left[\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right] - 5 * \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Solución

$$R = \left[\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right] - 5 * \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Realizar la multiplicación de matrices dentro del corchete

$$R = \begin{pmatrix} 1 * 2 + 7 * (-1) & 1 * 9 + 7 * 4 \\ 5 * 2 + 6 * (-1) & 5 * 9 + 6 * 4 \end{pmatrix} - 5 * \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} -5 & 37 \\ 4 & 69 \end{pmatrix} - 5 * \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Realizar la multiplicación de k por una matriz

$$R = \begin{pmatrix} -5 & 37 \\ 4 & 69 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 * 5 & 8 * 5 \\ 2 * 5 & 12 * 5 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} -5 & 37 \\ 4 & 69 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 & 40 \\ 10 & 60 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } R = \begin{pmatrix} -35 & -3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } R = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -6 & -35 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } R = \begin{pmatrix} -35 & -6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } R = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -3 & -35 \end{pmatrix}$$

Realizar la diferencia de matrices

$$R = \begin{pmatrix} -35 & -3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Nota 9 La multiplicación de matrices se realiza al sumar la multiplicación cada elemento de la fila de la matriz (A) por cada elemento de la columna de la matriz (B) de forma que quede un solo número. Es por ello que solo se podrá multiplicar dos matrices si el número de elementos de la fila de la matriz (A) es igual al mismo número de elementos de la columna de la matriz (B).

1.6.6. Ejercicios propuestos

Calcule la matriz resultante de:

$$2 \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- a) $\begin{bmatrix} 24 & 16 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$
- b) $\begin{bmatrix} 16 & 24 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$
- c) $\begin{bmatrix} 10 & 24 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$
- d) $\begin{bmatrix} 24 & 10 \\ 16 & 10 \end{bmatrix}$

Complete el enunciado

La matriz Es una matriz cuadrada donde los elementos..... de la diagonal principal son simétricamente.....pero con el signo.....

- a. Diagonal, dentro, iguales, contrario
- b. Antisimétrica, fuera, iguales, contrario
- c. Diagonal, fuera, diferente, negativo
- d. Antisimétrica, fuera, iguales, negativo

Calcule la matriz resultante de:

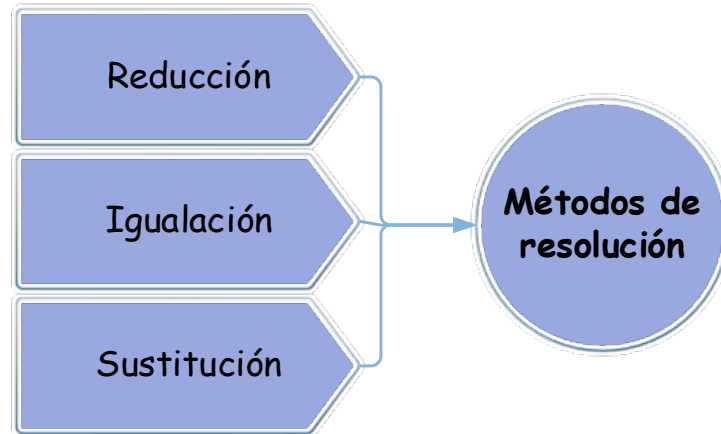
$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- a) $\begin{bmatrix} 104 & 68 \\ 66 & 22 \end{bmatrix}$
- b) $\begin{bmatrix} 22 & 66 \\ 68 & 104 \end{bmatrix}$
- c) $\begin{bmatrix} 22 & 104 \\ 68 & 66 \end{bmatrix}$
- d) $\begin{bmatrix} 68 & 104 \\ 22 & 66 \end{bmatrix}$

1.7. Sistemas de ecuaciones lineales

Es un conjunto de ecuaciones lineales que tienen más de una incógnita. Para resolver el sistema de ecuaciones consiste en calcular las incógnitas, de tal forma que todas las soluciones satisfagan al conjunto de ecuaciones.

1.7.1. Métodos de resolución para sistemas de ecuaciones lineales



1.7.2. Método de reducción

Este método consiste en sumar o restar las ecuaciones, para que de tal manera se elimine una de las incógnitas. Para este proceso si es necesario, se puede multiplicar un número para toda la ecuación, obteniendo una misma incógnita en ambas ecuaciones pero con diferente signo.

Ejemplo.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$

Solución

1. Observar el sistema, y verificar que no existen los mismos valores en una misma incógnita.

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

2. Multiplicar a la segunda ecuación por (-3)

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ (-3)x + (-3)3y = (-3)9 \end{cases}$$

3. Sumar las dos ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} 3x & 5y & = & 7 \\ -3x & -9y & = & -27 \\ \hline & -4y & = & -20 \end{array}$$

4. Despejar y en la ecuación resultante

$$y = \frac{-20}{-4}, \quad y = 5$$

5. Reemplazar el valor en cualquiera de las ecuaciones iniciales, para hallar el valor de x

$$\begin{aligned} x + 3(5) &= 9 \\ x &= 9 - 15 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

6. Respuestas

$$x = -6 \quad \wedge \quad y = 5$$

1.7.3. Método de igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones para igualar las dos expresiones algebraicas obtenidas.

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$

Solución

- Despejar la X en las dos ecuaciones

$$3x = 7 - 5y \quad x = 9 - 3y$$

$$x = \frac{7 - 5y}{3}$$

- Igualar las dos expresiones resultantes

$$\begin{aligned} x &= x \\ \frac{7 - 5y}{3} &= 9 - 3y \end{aligned}$$

- Despejar la variable Y

$$7 - 5y = 3(9 - 3y)$$

$$7 - 5y = 27 - 9y$$

$$-5y + 9y = 27 - 7$$

$$4y = 20$$

$$y = \frac{20}{4}$$

$$y = 5$$

- Reemplazar el valor de Y en cualquiera de las ecuaciones despejadas al inicio

$$x = 9 - 3(5)$$

$$x = 9 - 15$$

$$x = -6$$

- Respuestas

$$x = -6 \quad \wedge \quad y = 5$$

1.7.4. Método de sustitución

Consiste en despejar una incógnita de cualquiera de las ecuaciones, para sustituir en la otra ecuación obteniendo una ecuación con una sola incógnita.

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$

Solución

- Despejar la incógnita, en la ecuación que sea de mayor facilidad

$$x = 9 - 3y$$

- Sustituir en la primera ecuación

$$3(9 - 3y) + 5y = 7$$

- Hallar el valor de Y

$$\begin{aligned} 27 - 9y + 5y &= 7 \\ -9y + 5y &= 7 - 27 \\ -4y &= -20 \\ y &= \frac{20}{4} \\ y &= 5 \end{aligned}$$

- Reemplazar el valor de Y en la ecuación despejada al inicio

$$\begin{aligned} x &= 9 - 3(5) \\ x &= 9 - 15 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

1.8. Ejercicios Resueltos

En el sistema de ecuaciones, determine el valor de y si $A = \frac{5}{4}$

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ \frac{x}{2} + Ay = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Solución

Multiplicar para $\frac{1}{2}$ la primera ecuación, para aplicar el método de reducción

$$\frac{-x}{2} - \frac{3y}{2} = -1$$

- a) 1
- b) -1**
- c) 2
- d) -2

$$\begin{array}{rcl} \frac{-x}{2} & -\frac{3y}{2} & = -1 \\ \frac{x}{2} & +Ay & = \frac{3}{4} \\ \hline & Ay - \frac{3y}{2} & = \frac{1}{4} \end{array}$$

Reemplazar el valor de A en la ecuación resultante para encontrar el valor de y

$$\begin{aligned} \frac{5}{4}y - \frac{3}{2}y &= \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4}y &= \frac{1}{4} \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Nota 10 Ay es un distractor, porque no es un factor numérico en el sistema, pero hay que tratarlo como tal y eliminar la otra variable.

En un laboratorio se realizan dos mediciones de temperatura t_1 y t_2 , y, en el cual se obtuvieron las siguientes ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 3t_1 + 5t_2 = 4 \\ 2t_1 - 3t_2 = 7 \end{cases}$$

Si la temperatura se mide en grados Celsius, se obtiene que t_1 es ___ y t_2 es ___ respectivamente

Solución

Multiplicar por 2 la primera ecuación y para -3 la segunda ecuación. Para sumar.

$$\begin{array}{rcl} 1ec. & 6t_1 + 10t_2 & = 8 \\ 2ec. & -6t_1 - 9t_2 & = -21 \\ \hline & t_2 & = -13 \end{array}$$

Reemplazar el valor de t_2 en una ecuación

$$\begin{aligned} 3t_1 + 5(-13) &= 4 \\ 3t_1 &= 4 + 65 \\ t_1 &= \frac{69}{3} \end{aligned}$$

$$t_1 = 23$$

- a) 23;-13
- b) -13;23
- c) -23;13
- d) 13;-23

Nota 11 No es la única forma de resolver, se puede usar cualquier método de solución

1.8.1. Ejercicios propuestos

Un mecánico realiza compras para su taller y paga 50,4 dólares por 8 líquidos de freno y 6 radiadores. La diferencia entre los valores de los productos es de 4,2 dólares. ¿Cuál es el precio del producto más barato?

- a) 1,20
- b) 1,80
- c) 5,40
- d) 6,00

Los dueños de una fábrica textil desean dar navidad a todos sus 500 empleados, para ello cuentan con 2800 USD. Si se decide que para cada el regalo de las mujeres tiene un costo de 8 USD y para el de los varones 5 USD.

¿Cuántos hombres y cuantas mujeres trabajan en la fábrica textil?

- a) 250 hombres y 250 mujeres
- b) 300 hombres y 200 mujeres
- c) 100 hombres y 400 mujeres
- d) 400 hombres y 100 mujeres

Entre melones y sandias tengo 8 frutas, entre sandias y manzanas tengo 9 frutas, entre melones y manzanas tengo 11 frutas. ¿Cuántas manzanas hay?

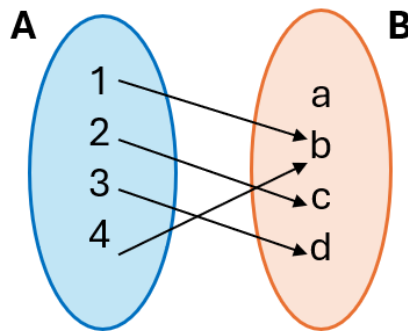
- a) 6
- b) 2
- c) 11
- d) 5

1.9. Funciones reales

Función: Es el subconjunto que se obtiene del producto cartesiano $A \times B$, que cumple con las siguientes condiciones:

1. $\forall x \in A, \exists y \in B$ tal que $(x, y) \in f$
Para todo elemento del conjunto de salida, existe una imagen en el conjunto de llegada.
2. Si (x, y) y $(x, z) \in f \rightarrow y = z$
No existen dos pares ordenados con la misma primera componente y de la segunda componente distinta.

Dominio



El dominio de una función f , es aquel conjunto formado por todos $x \in A$, tal que existe un $y \in B$, donde $y = f(x)$

$$D_f = \{x \in A / (x, y) \in f\}$$

1.9.1. Recorrido

El recorrido de una función f , es aquel conjunto formado por todos los $y \in B$, que son imágenes de $x \in A$.

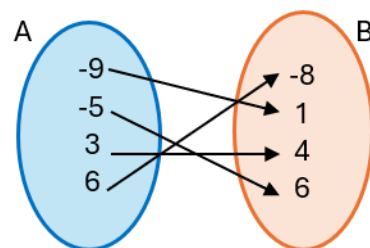
$$R_f = \{y \in B / y = f(x) \wedge x \in A\}$$

1.10. Ejercicio tipo Ser Bachiller

En un laboratorio se reservan datos de pares ordenados de una red, mismo que se agrupan en una tabla. ¿Cuáles de los siguientes pares ordenados permiten analizar la red como una función?

- a) $(-1; 2)(-3; 5)(-3; 6)(-1; 9)$
- b) $(2; -3)(5; 4)(-1; 6)(2; -14)$
- c) $(-5; 6)(3; 4)(6; -8)(-9; 1)$
- d) $(5; -1)(6; -1)(5; 16)(8; -3)$

Solución



Nota 12 Tomar en cuenta las condiciones de una función

1.- Todo elemento del conjunto de salida, tiene una imagen en el conjunto de llegada.

2.- No existen dos pares ordenados con la misma primera componente, es decir no se repite la componente x en ningún par ordenado.

1.11. Función cuadrática

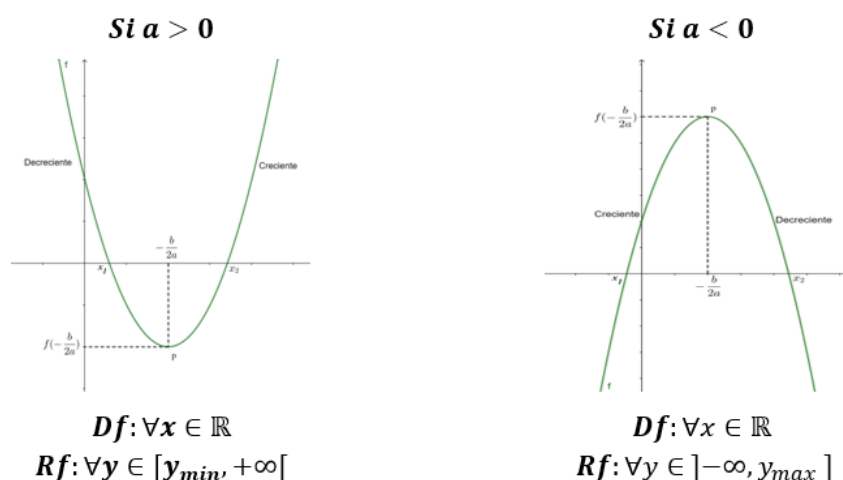
Función cuadrática: Es una función polinómica de grado dos, misma que tiene la siguiente forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ siendo } a \neq 0$$

Donde:

- a. Coeficiente cuadrático
- b. Coeficiente lineal
- c. Término independiente

Orientación



Discriminante Es la expresión que calcula los coeficientes de la ecuación:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

El signo del discriminante indica el número de soluciones de la ecuación.

Discriminante	Raíces o intersecciones con el eje
$b^2 - 4ac > 0$	Dos raíces reales diferentes
$b^2 - 4ac = 0$	Dos raíces reales iguales
$b^2 - 4ac < 0$	Dos raíces complejas conjugadas

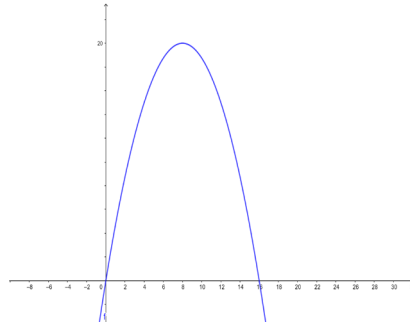
1.12. Ejercicios Resueltos

Se estudia la trayectoria de una pelota de fútbol con el objetivo de determinar los efectos del viento en su movimiento, logrando determinar analíticamente su función: $f(x) = -\frac{5x^2}{16} + 5x$

Donde: $f(x)$: altura de la pelota de fútbol en metros

x : la distancia en el eje horizontal en metros

La grafica de la trayectoria es:



Determine la altura de la trayectoria si la distancia en el eje horizontal solo puede tomar valores en el intervalo $[0; 16]$

- a) $[0; 20]$
- b) $[20; 0]$
- c) $[0; 18]$
- d) $[18; 0]$

Solución

Hallar el vértice de la función: $f(x) = -\frac{5x^2}{16} + 5x$

$$Vx = -\frac{b}{2a}$$

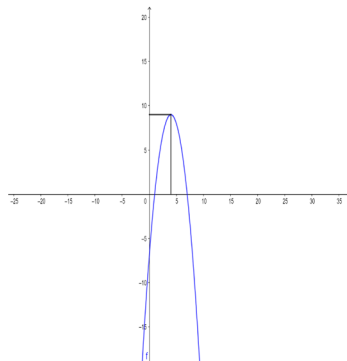
$$Vx = -\frac{5}{2\left(-\frac{5}{16}\right)}, \quad Vx = 8$$

$$Vy = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

$$Vy = -\frac{5(8)^2}{16} + 5(8), \quad Vy = 20$$

Nota 13 Al especificar que solo toma valores de $[0; 12]$, habla de la parábola que se forma hasta esos puntos, y esto especifica la altura a la que se refiere el ejercicio.

Si el módulo de elasticidad de un material que está elaborado de acero inoxidable se puede expresar mediante la función cuadrática, misma que indica la variación de la elasticidad del material en función del tiempo, como se indica en la figura.



¿Cuál es la coordenada máxima del punto de elasticidad?

- a) $(4; 9)$
- b) $(4; 8)$
- c) $(3; 9)$
- d) $(3; 8)$

Solución

El punto máximo es el vértice de la función.

$$Vx = -\frac{b}{2a}$$

$$Vx = -\frac{8}{2(-1)}, \quad Vx = 4$$

$$Vy = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

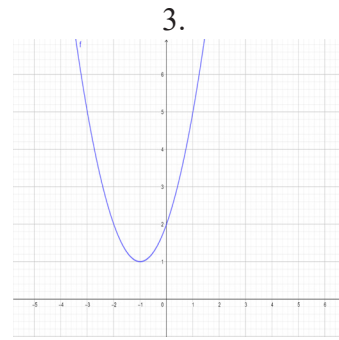
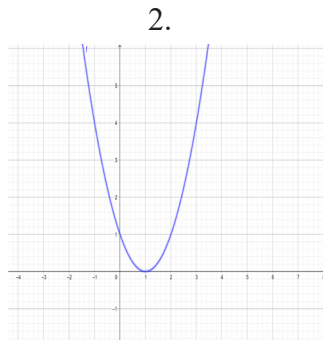
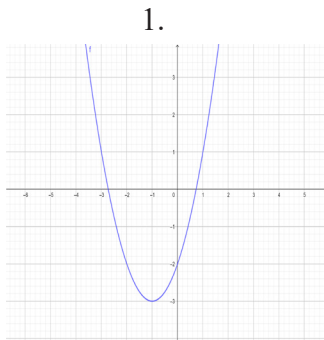
$$Vy = -(4)^2 + 8(4) - 7, \quad Vy = 9$$

Nota 14 Siempre que se refiera al máximo, a lo más alto en una parábola convexa habla del vértice.

1.12.1. Ejercicios propuestos

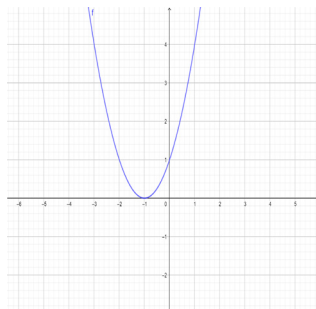
Relacione la función con su respectiva gráfica

- a. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
- b. $f(x) = x^2 + 2x + 2$
- c. $f(x) = x^2 - 2x + 1$



- a. 1b, 2c, 3a
- b. 1c, 2a, 3b
- c. 1a, 2b, 3c
- d. 1b, 2a, 3c

Dada la función $f(x) = x^2 + 2x + 2$ determine el intervalo donde esta es estrictamente decreciente



- a) $[-\infty; -1]$
- b) $[-\infty; -1]$
- c) $[-1; +\infty]$
- d) $[-1; +\infty]$

1.13. Función cúbica

Función cúbica: Es una función polinómica de grado tres, misma que tiene la siguiente forma:

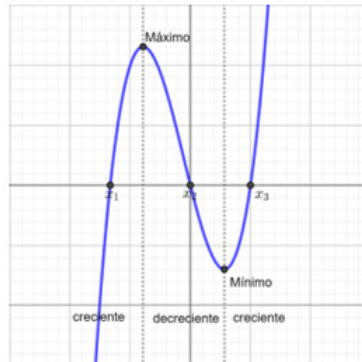
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ siendo } a \neq 0$$

Donde:

- a. Coeficiente cúbico
- b. Coeficiente cuadrático
- c. Coeficiente lineal
- d. Término independiente

Orientación

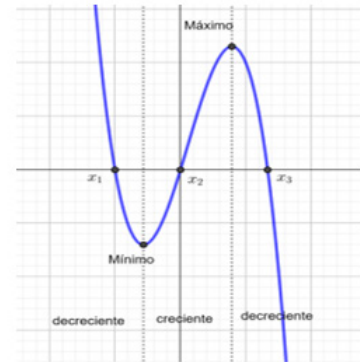
Si $a > 0$



$$Df: \forall x \in \mathbb{R}$$

$$Rf: \forall y \in \mathbb{R}$$

Si $a < 0$



$$Df: \forall x \in \mathbb{R}$$

$$Rf: \forall y \in \mathbb{R}$$

1.14. Ejercicios tipo Ser Bachiller

Se desea diseñar una bodega en un local comercial. Para que la mercancía pueda ingresar fácilmente, la medida de la altura debe exceder en 4 metros de ancho y el largo debe exceder en 6 metros a la altura. Si la altura de la bodega es de x metros, determine la función que representa su volumen.

Solución

$$\text{Volumen} = \text{altura } (h) * \text{ancho } (a) * \text{largo } (l)$$

Donde:

$$h = x$$

$$a = x - 4$$

$$l = x + 6$$

$$\text{Reemplazar } V = h * a * l$$

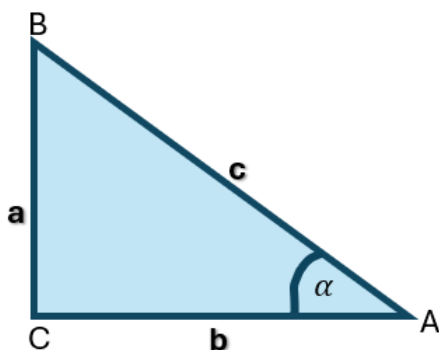
$$V = x * (x - 4) * (x + 6)$$

$$V = x^3 + 2x^2 - 24x$$

Nota 15 Este tipo de ejercicios, se debe tomar en cuenta el número de variables del que habla el problema, para identificar el grado de la ecuación y descartar variables

1.15. Funciones Trigonómicas

Función trigonométrica: Son funciones definidas por razones trigonométricas, mismas que están asociadas a los lados de un triángulo rectángulo y un ángulo agudo.



$$\text{sen}(\alpha) = \frac{a}{c}$$

$$\text{csc}(\alpha) = \frac{c}{a}$$

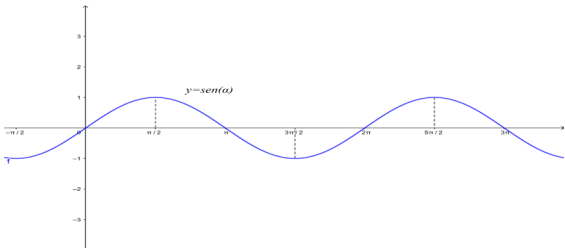
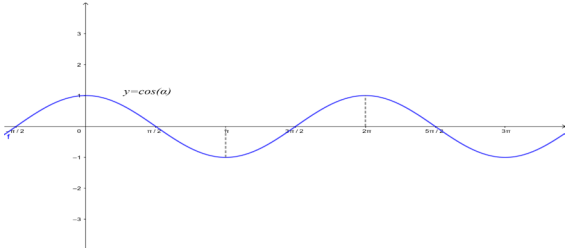
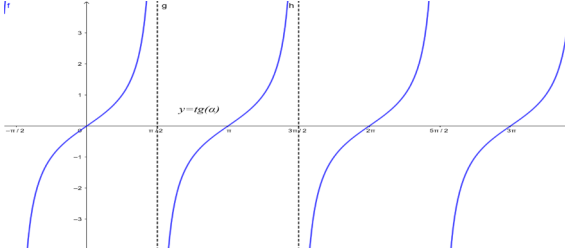
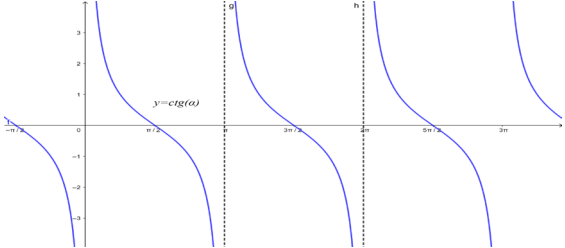
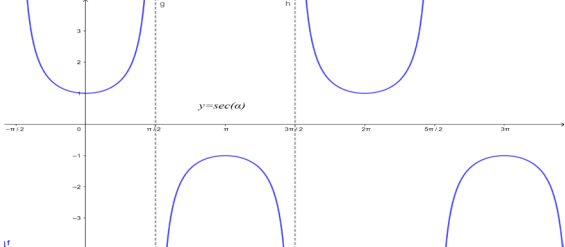
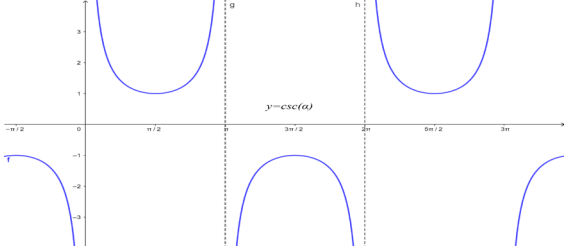
$$\text{cos}(\alpha) = \frac{b}{c}$$

$$\text{sec}(\alpha) = \frac{c}{b}$$

$$\text{tan}(\alpha) = \frac{a}{b}$$

$$\text{ctg}(\alpha) = \frac{b}{a}$$

1.16. Gráfica de las funciones trigonométricas

Nombre	Características	Gráfico
$\text{sen}(\alpha)$	Periodo: $2\pi \text{ rad}$ Dominio: $\mathbb{R}$ Recorrido: $[-1; 1]$	
$\text{cos}(\alpha)$	Periodo: $2\pi \text{ rad}$ Dominio: $\mathbb{R}$ Recorrido: $[-1; 1]$	
$\text{tan}(\alpha)$	Periodo: $\pi \text{ rad}$ Dominio: $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + a\pi\right\}$ <i>si a número entero</i> Recorrido: $\mathbb{R}$	
$\text{ctg}(\alpha)$	Periodo: $\pi \text{ rad}$ Dominio: $\mathbb{R} - \{a\pi\}$ <i>si a número entero</i> Recorrido: $\mathbb{R}$	
$\text{sec}(\alpha)$	Periodo: $2\pi \text{ rad}$ Dominio: $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + a\pi\right\}$ <i>si a número entero</i> Recorrido: $[-\infty; -1] \cup [1; +\infty]$	
$\text{csc}(\alpha)$	Periodo: $2\pi \text{ rad}$ Dominio: $\mathbb{R} - \{a\pi\}$ <i>si a número entero</i> Recorrido: $[-\infty; -1] \cup [1; +\infty]$	

1.17. Ejercicios Resueltos

Una piscina tiene una cubierta que está dada por la función $f(x) = \frac{35}{5} \text{sen}(x) + \frac{35}{5}$ si se desea reforzar su resistencia colocando un soporte vertical, determinar la máxima longitud que debe de tener el soporte.

Solución

Es la función $y = A \text{sen}(bx) + c$, donde:

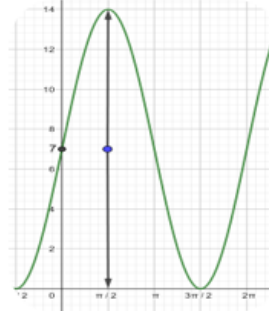
A = amplitud

b = periodo

c = desplazamiento vertical

en el caso se tiene $f(x) = \frac{35}{5} \text{sen}(x) + \frac{35}{5}$

$f(x) = 7\text{sen}(x) + 7$, se sabe que la amplitud es 7 la gráfica sería:



a) 7

b) 14

c) 5

d) 35

Siete unidades de hacia arriba y siete unidades hacia abajo desde su desplazamiento vertical.

Otra solución

Despejar y $\text{sen}(x) = \frac{y-7}{7}$

Donde $-1 \leq \frac{y-7}{7} \leq 1$

$-1 \leq \frac{y-7}{7} \wedge \frac{y-7}{7} \leq 1$

$-7 \leq y-7 \wedge y-7 \leq 7$

$y \geq 0 \wedge y \leq 14$

Nota 16 si se tiene presente que la función seno parte del origen y al tener un desplazamiento vertical se convierte en el origen.

La función $\text{sen}(x)$, siempre tiene la misma amplitud (de 1), hacia el eje positivo y negativo de las y.

Complete el enunciado. Al estudiar las ondas del sonido, se estableció que determinadas ondas están dadas por la función: $f(x) = \frac{\text{sen}(x)-7}{\text{sen}(x)-4}$

Si la tierra es considerada como punto de referencia, la onda ha alcanzado una altura de _____ metros durante el estudio.

Solución

Como el enunciado indica, que lo que se requiere es la altura.

$$f(x) = \frac{\text{sen}(x) - 7}{\text{sen}(x) - 4}$$

Recordar los puntos máximos y mínimos

$$f(x) = \frac{1-7}{1-4} = \frac{-6}{-3} = 2$$

Nota 17 la función $\text{sen}(x)$, tiene un alcance máximo de 1, y mínimo de -1,

1.17.1. Ejercicios propuestos

Complete el enunciado. Al estudiar las ondas del sonido, se estableció que determinadas ondas están dadas por la función: $f(x) = \frac{\cos(x)-7}{\cos(x)-2}$

Si la tierra es considerada como punto de referencia, la onda ha alcanzado una altura de _____ metros durante el estudio.

- a. 8
- b. 7
- c. 6
- d. 5

Complete el enunciado. Al estudiar las ondas del sonido, se estableció que determinadas ondas están dadas por la función: $f(x) = \frac{\sin(x)-9}{\sin(x)-3}$

Si la tierra es considerada como punto de referencia, la onda ha alcanzado una altura de _____ metros durante el estudio.

- a. 5
- b. 8
- c. 6
- d. 3

1.18. Función exponencial y función logarítmica

1.18.1. Función exponencial

Son funciones trascendentes que tiene la siguiente forma:

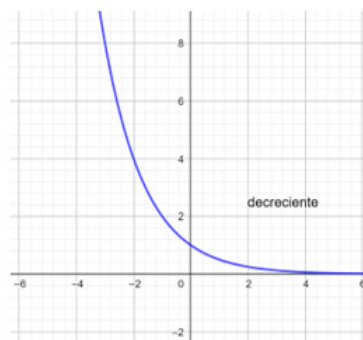
$$f(x) = a^x, \quad \text{siendo } a > 0, \quad a \neq 1$$

Orientación

$a > 1$



$0 < a < 1$



$$Df: \forall x \in \mathbb{R}$$

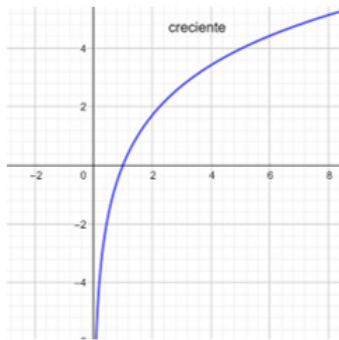
$$Rf: \forall y \in]0; +\infty[$$

1.18.2. Función logarítmica

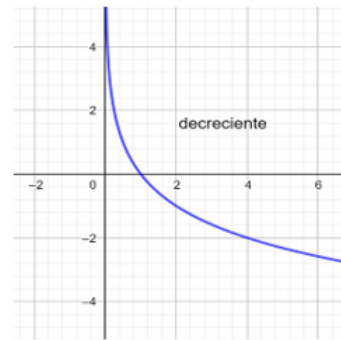
La función logarítmica es la inversa de la función exponencial que está representada por la función.

$$f(x) = \log_a x, \text{ siendo } a > 0, \quad a \neq 1$$

$$a > 1$$



$$0 < a < 1$$

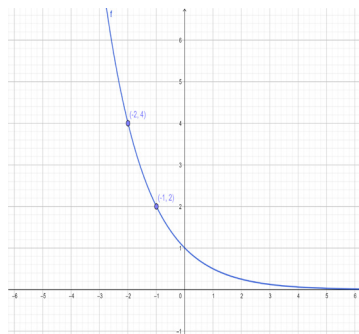


$$Df: \forall x \in]0; +\infty[$$

$$Rf: \forall y \in \mathbb{R}$$

1.18.3. Ejercicios tipo Ser Bachiller

De acuerdo con la gráfica, cual es la función exponencial que lo representa.



Solución

La función exponencial tiene la forma $f(x) = y = a^x$

Se usa un punto de gráfica $(-2; 4)$

Reemplazar los valores del punto en la función

$$y = a^x$$

$$4 = a^{-2}$$

Despejamos el valor de a con el uso de las propiedades exponenciales

$$(2^2)^{-\frac{1}{2}} = (a^{-2})^{-\frac{1}{2}}$$

$$2^{-1} = a^1$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Reemplazamos el valor de a en la función

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

- a) $f(x) = (2)^x$
- b) $f(x) = (-2)^x$
- c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- d) $f(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^x$

Nota 18 Es recomendable saber las formas que tienen las funciones, en este tipo de ejercicios solo es el reemplazo de un punto que pase por la función. Adicionalmente las propiedades de los exponentes

1.18.4. Ejercicios propuestos

Indique cual es el dominio de la función $f(x) = \log_3(x - 4)$

- a. $Df = [4; +\infty[$
- b. $Df =]4; +\infty[$
- c. $Df =] - \infty; 4[$
- d. $Df =] - \infty; 4]$

Hallar la función inversa de $f(x) = 7^x$

- a. $f(x) = \log_7 x$
- b. $f(x) = \log_x 7$
- c. $f(x) = \log_{10}(x - 7)$
- d. $f(x) = \log_7 7x$

Hallar la función inversa de $f(x) = \log_5 x$

- a. $f(x) = 5^x$
- b. $f(x) = x^5$
- c. $f(x) = 7^x$
- d. $f(x) = x^7$

1.19. Progresiones aritméticas y geométricas

1.19.1. Progresiones aritméticas

Conjunto de números ordenados tales que cada uno de ellos con excepción del primer término , es igual al anterior más o menos un número fijo al que se le llama diferencia . Cada término ocupa una posición en la sucesión, misma que puede ser finita o infinita. Las progresiones pueden ser:

Creciente: sucede cuando cada término es mayor que el anterior

$$a_{n+1} > a_n$$

Ejemplo: 1, 3, 5, 7, 9,...

Decreciente: sucede cuando cada término es menor que el anterior

$$a_{n+1} < a_n$$

Ejemplo: 8, 6, 4, 2,...

1.19.2. Término General

Permite calcular cualquier término de la sucesión. La fórmula se obtiene con el primer número de la sucesión (a_1) y la diferencia (d).

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$$

1.19.3. Suma de n términos

Si se conoce el primer término (a_1) y el término enésimo (a_n) de la sucesión, se puede calcular la suma de n términos con la fórmula:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

1.19.4. Ejercicios tipo Ser Bachiller

En un restaurante de la ciudad se entregan almuerzos a domicilio. Si se trabaja los 7 días a la semana y diariamente se aumentan los pedidos siguiendo una progresión aritmética de 10 almuerzos, ¿Cuál es la cantidad de almuerzos se vendió en la semana si se conoce que el primer día se vendió 10 almuerzos?

Solución

Datos:

$$a_1 = 10$$

$$n = 7$$

$$d = 10$$

Con la fórmula de suma de términos: $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$

Como se conoce el valor del último término reemplazamos $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$ en la fórmula de la suma.

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_1 + d \cdot (n - 1))}{2}$$

$$S_n = \frac{n \cdot (2a_1 + d \cdot (n - 1))}{2}$$

$$S_7 = \frac{7 \cdot (20 + 10 \cdot (7 - 1))}{2}$$

$$S_7 = \frac{7 \cdot (20 + 60)}{2}$$

$$S_7 = \frac{7 \cdot (80)}{2}$$

$$S_7 = 280$$

a) 70

b) 140

c) 210

d) 280

Nota 19 El distractor en este ejercicio es el último término a_n , pues no le da un valor específico.

Los padres de un estudiante han realizado un total de 40 pagos mensuales para el pago de su colegiatura de su hijo, si el último pago fue de USD 80, y la suma de sus pagos en total fueron de USD 3260, ¿Cuál fue el valor que pagaron el primer mes de colegiatura?

Solución.

Datos

Con la fórmula de suma de términos: $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$

Despejar el valor de a_1

$$a_1 = \frac{2(S_n)}{n} - a_n$$

Reemplazar datos

$$a_1 = \frac{2(3260)}{40} - 80$$

$$a_1 = 83$$

a) 163 USD

b) 81 USD

c) 83 USD

d) 80 USD

Nota 20 Para escoger que ecuación utilizar, precisa de tener claro los datos que dispone. Por ejemplo en este caso solo es necesario un despeje de la incógnita.

1.20. Progresiones geométricas

Es una progresión geométrica cuando cada término de la sucesión se obtiene multiplicando un número constante al que se lo conoce como razón (r), por el término anterior.

1.20.1. Término General

Para calcular cualquier término de una sucesión se utiliza la fórmula general de la progresión.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Donde:

Si, $r > 1$ la progresión es creciente

Si, $0 < r < 1$, la progresión es decreciente

Si, $r < 0$ la progresión es alternada

1.20.2. Suma de n términos

Si se conoce el primer término (a_1) el valor de n términos de la sucesión, y la razón

$$s_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

1.20.3. Ejercicios Resueltos

Conociendo la progresión: 3, 9, 27, 81... ¿Cuál es el valor del octavo término y la suma de todos sus números?

Solución

Datos:

Con la fórmula $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ determinar el quinceavo término.

$$a_8 = 3 \cdot 3^{8-1}$$

$$a_8 = 3 \cdot 3^7$$

$$a_8 = 6561$$

La suma de los términos de la progresión geométrica

$$s_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$s_8 = 3 \cdot \frac{3^8 - 1}{3 - 1}$$

$$s_8 = 3 \cdot \frac{3^8 - 1}{2}$$

$$s_8 = 9840$$

a) 6561, 9480

b) 6165, 9480

c) 6165, 9840

d) 6561, 9840

Nota 21 Si, el ejercicio no aclara el tipo de progresión que es. Recordar que la progresión geométrica se da cuando cada término de la sucesión se obtiene multiplicando un número constante.

1.20.4. Ejercicios propuestos

En un baúl secreto se hallan n monedas de colección muy valiosas, el dueño se pregunta en una progresión ¿Cuál es la suma de los quince primeros números pares mayores que 5?

a. 500

b. 400

- c. 300
- d. 200

En una progresión se conoce que el cuarto término es 10, y el sexto es 16 ¿Cuál es la progresión que sigue?

- a. 2, 4, 6, 10, 8, 16
- b. 1, 4, 10, 13, 16
- c. 5, 2, 4, 10, 12, 16
- d. 3, 5, 7, 10, 13, 16

En una progresión geométrica se conoce que el primer término es 6, el segundo 12 y el tercero es 24 ¿Qué posición ocupa el término 96?

- a. Cuarta posición
- b. Quinta posición
- c. Sexta posición
- d. Séptima posición

CAPITULO 2

Geometría y medida

2.1. Estándares de aprendizaje y DCD

Grupo Temático	Estándar de aprendizaje	Destrezas con Criterio de Desempeño a Evaluar
Geometría y Medida	E.M.5.6. Emplea vectores geométricos en el plano, realiza operaciones en el espacio vectorial R^2 , determina la ecuación de la recta de forma vectorial y paramétrica y utiliza las ecuaciones cartesianas de lugares geométricos en la resolución de problemas aplicados a la física y a la geometría con el apoyo de las TIC.	M.5.2.1. Graficar vectores en el plano (coordenadas) identificando sus características: dirección, sentido y longitud o norma.
		M.5.2.2. Calcular la longitud o norma (aplicando el teorema de Pitágoras) para establecer la igualdad entre dos vectores.
		M.5.2.3. Sumar, restar vectores y multiplicar un escalar por un vector de forma geométrica y de forma analítica, aplicando propiedades de los números reales y de los vectores en el plano.
		M.5.2.6. Reconocer los vectores como elementos geométricos de R^2 .
		M.5.2.9. Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección, o a partir de dos puntos de la recta
		M.5.2.10. Identificar la pendiente de una recta a partir de la ecuación vectorial de la recta, para escribir la ecuación cartesiana de la recta y la ecuación general de la recta.
		M.5.2.11. Determinar la posición relativa de dos rectas en R^2 (rectas paralelas, que se cortan, perpendiculares) en la resolución de problemas (por ejemplo: trayectoria de aviones o de barcos para determinar si se interceptan).
		M.5.2.14. Resolver y plantear aplicaciones de la ecuación vectorial, paramétrica y cartesiana de la recta con apoyo de las TIC.
		M.5.2.16. Describir la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola como lugares geométricos en el plano.
		M.5.2.23. Determinar si dos planos son paralelos (cuando no hay solución) o perpendiculares (si los vectores normales a los planos son perpendiculares) para resolver aplicaciones geométricas en R^3 .
		M.5.2.26. Realizar un proceso de solución gráfica y analítica del problema de programación lineal graficando las inecuaciones lineales, determinando los puntos extremos del conjunto de soluciones factibles, y encontrar la solución óptima.
		M.5.2.27. Resolver y plantear aplicaciones (un modelo simple de línea de producción, un modelo en la industria química, un problema de transporte simplificado), interpretando y juzgando la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

NOTA: DCD Destrezas con Criterio de Desempeño

FUENTE: Currículo de los niveles de educación obligatoria (MINEDUC, 2019) y Estándares de aprendizaje (MINEDUC, 2016)

ELABORADO POR: Pintado C. Andrea

2.2. Vectores geométricos en el plano

Vector: Es un segmento orientado, que va de un punto de origen, y un punto extremo.

Características:

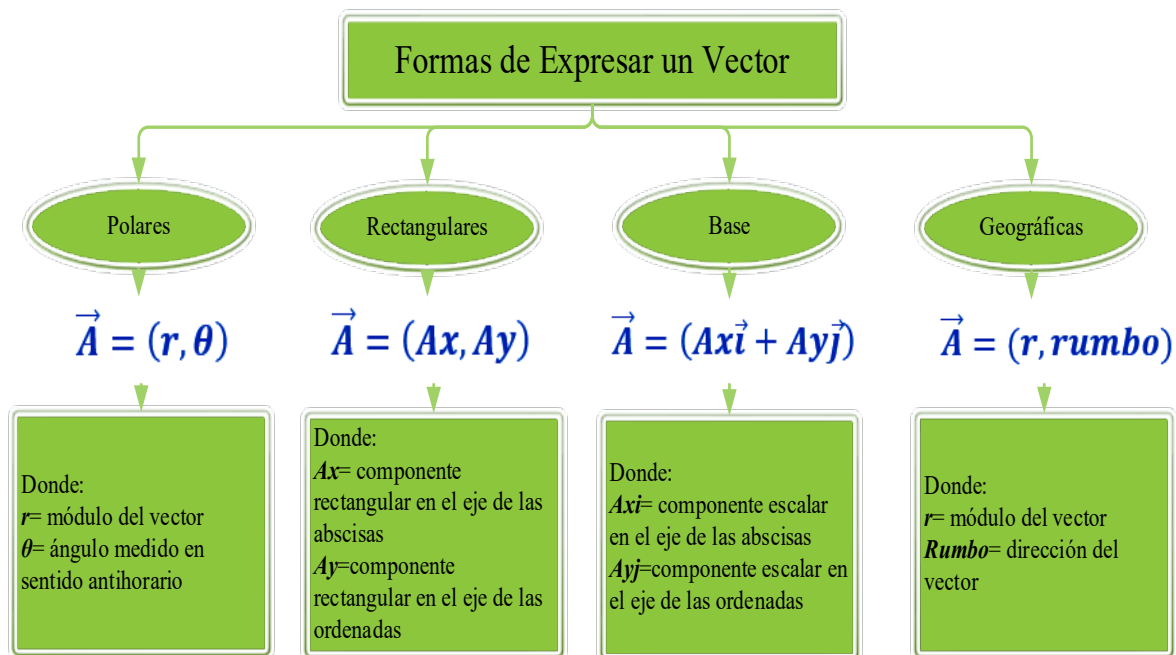
Módulo: Longitud del segmento

Dirección: Ángulo o grado de inclinación respecto del eje de las abscisas

Sentido: Orientación que toma el vector, representada por la saeta.

Un vector en el plano está definido por un par ordenado, donde x y y son componentes del vector. Todo vector representa la suma vectorial de sus componentes:

2.3. Formas de expresión de un vector



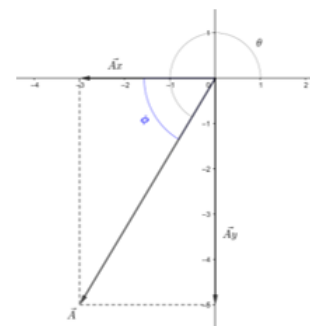
2.4. Transformación de las formas de expresión de vectores

Coordenadas Rectangulares

Si, $\vec{A} = (-3; -5) \text{ km}$

A vector base $\vec{A} = -3\vec{i} - 5\vec{j}$
 A coordenadas polares

1.- Módulo del vector
 Usar el teorema de Pitágoras
 $A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$



A coordenadas Geográficas

1.- Módulo del vector
 Usar el teorema de Pitágoras
 $A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$

$$A = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2}$$

$$A = \sqrt{16}$$

$$A = 4 \text{ km}$$

2.- Ángulo

Usar la razón trigonométrica

$$\tan \theta = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{Ay}{Ax}$$

$$\tan \theta = \frac{-5}{-3}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{-3}\right)$$

$$\theta = 59,04^\circ$$

Como el vector está en el tercer cuadrante

$$\phi = 180^\circ + 59,04^\circ$$

$$\phi = 239,04^\circ$$

3.- Coordenada polar

$$\vec{A} = (4 \text{ km}; 239,04^\circ)$$

$$A = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2}$$

$$A = \sqrt{16}$$

$$A = 4 \text{ km}$$

2.- Rumbo

Usar la razón trigonométrica

$$\tan \theta = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{Ay}{Ax}$$

$$\tan \theta = \frac{-5}{-3}$$

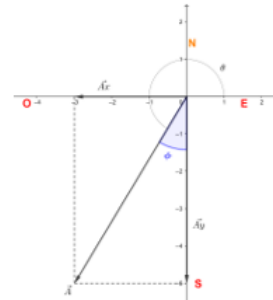
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{-3}\right)$$

$$\theta = 59,04^\circ$$

Considerar un sistema de coordenadas geográficas, donde:

$$\phi = 90^\circ - 59,04^\circ$$

$$\phi = 30,96^\circ$$

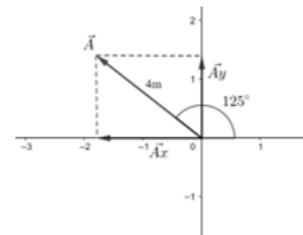


3.- Coordenada Geográfica

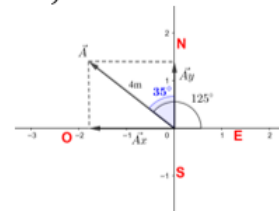
$$\vec{A} = (4 \text{ km}; S 30,96^\circ O)$$

Coordenadas Polares

$$\text{Si, } \vec{A} = (4m, 125^\circ)$$



$$\vec{A} = (4m; N35^\circ O)$$



A coordenadas Geográficas

A coordenadas Rectangulares

1.- Componente rectangular en x

$$Ax = A \cdot \cos \theta$$

$$Ax = 4 \cdot \cos 125^\circ$$

$$Ax = -2,29m$$

2.- Componente rectangular en y

$$Ay = A \cdot \sin \theta$$

$$Ay = 4 \cdot \sin 125^\circ$$

$$Ay = 3,28$$

3.- Coordenada Rectangular

$$\vec{A} = (-2,29; 3,28)m$$

A vector base

1.- Componente rectangular en x

$$Ax = A \cdot \cos \theta$$

$$Ax = 4 \cdot \cos 125^\circ$$

$$Ax = -2,29m$$

2.- Componente rectangular en y

$$Ay = A \cdot \sin \theta$$

$$Ay = 4 \cdot \sin 125^\circ$$

$$Ay = 3,28$$

3.- Vector base

$$\vec{A} = (-2,29\vec{i} + 3,28\vec{j})m$$

2.5. Operaciones con vectores

2.5.1. Suma de vectores

La operación de adición de dos o más vectores da como resultado otro vector. Para realizar la suma de vectores existen varios métodos, para la pronta obtención de resultados se sugiere realizar el método algebraico.

2.5.2. Método algebraico

Para utilizar este método los vectores tienen que estar expresados en función de sus vectores base o en componentes rectangulares, puesto que se suman sus componentes respectivas.

Vector base	Componentes Rectangulares
$\vec{A} = Ax\vec{i} + Ay\vec{j}$	$\vec{A} = (Ax; Ay)$
$\vec{B} = Bx\vec{i} + By\vec{j}$	$\vec{B} = (Bx; By)$
$\vec{C} = Cx\vec{i} + Cy\vec{j}$	$\vec{C} = (Cx; Cy)$
... ..	
$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \dots = (Ax + Bx + Cx + \dots)\vec{i} + (Ay + By + Cy + \dots)\vec{j}$	$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \dots = (Ax + Bx + Cx + \dots; Ay + By + Cy + \dots)$
$\vec{R} = Rx\vec{i} + Ry\vec{j}$	$\vec{R} = (Rx; Ry)$

Ejemplo:

Vector base	Componentes Rectangulares
$\vec{A} = (6\vec{i} - 4\vec{j})m$	$\vec{A} = (6; -4)m$
$\vec{B} = (-5\vec{i} + 2\vec{j})m$	$\vec{B} = (-5; 2)m$
$\vec{C} = (7\vec{i} + 3\vec{j})m$	$\vec{C} = (7; 3)m$
$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (6 + (-5) + 7)\vec{i} + ((-4) + 2 + 3)\vec{j}$	$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (6 + (-5) + 7; (-4) + 2 + 3)$
$\vec{R} = (8\vec{i} + 1\vec{j})m$	$\vec{R} = (8; 1)m$

2.6. Propiedades de la suma de vectores

$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$	Conmutativa
$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$	Asociativa
$m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$	Distributiva vectorial
$(m + n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$	Distributiva escalar
$\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$	Idéntico aditivo
$\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$	Inverso aditivo

2.7. Diferencia de vectores

Es la suma de un vector con el negativo de otro:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

Por lo tanto todos los métodos que se usan en la suma vectorial son aplicables a la diferencia vectorial, con la única diferencia que esta, no cumple con la propiedad conmutativa de la suma.

$$\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$$

Ejemplo:

Vector base	Componentes Rectangulares
$\vec{A} = (6\vec{i} - 4\vec{j})m$	$\vec{B} = (-5; 2)m$
$\vec{B} = (-5\vec{i} + 2\vec{j})m$	$\vec{A} = (6; -4)m$
$\vec{A} - \vec{B} = (6 - (-5))\vec{i} + ((-4) - 2)\vec{j}$	$\vec{B} + (-\vec{A}) = (-5 + (-6); 2 + (+4))$
$\vec{R} = (11\vec{i} - 6\vec{j})m$	$\vec{R} = (-11; 6)m$

2.8. Multiplicación de un escalar por un vector

Es un vector cuyo valor se obtiene con la multiplicación de un número real (k), por un vector ($\vec{A}$).

$$k \cdot \vec{A} = k(Ax\vec{i} + Ay\vec{j})$$

$$k \cdot \vec{A} = kAx\vec{i} + kAy\vec{j}$$

Si:

- $k > 0$, El vector resultante ($k \cdot \vec{A}$) tiene la misma dirección y sentido que la del vector ($\vec{A}$)
- $k < 0$, El vector resultante ($k \cdot \vec{A}$) es opuesto al vector ($\vec{A}$)
- $k = 0$ El vector resultante ($k \cdot \vec{A}$) es un vector nulo

2.9. Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector

$k \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot k$	Conmutativa
$a(k \cdot \vec{A}) = (a \cdot k) \cdot \vec{A}$	Asociativa
$(a + k) \cdot \vec{A} = a \cdot \vec{A} + k \cdot \vec{A}$	Distributiva escalar
$k \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = k \cdot \vec{A} + k \cdot \vec{B}$	Distributiva vectorial

2.10. Ejercicios Resueltos

Para levantar una masa extraña de un hoyo, tres grúas A, B, C, ejercen una determinada fuerza como se muestra en la figura. Determine el módulo de la fuerza total máxima antes de romper las cuerdas. Considere que los ejes de coordenadas miden la fuerza de los grúas en Newtones.

Solución

Identificar los vectores que forman en el plano las grúas.

$$\vec{A} = (-1; 3)$$

$$\vec{B} = (3; 2)$$

$$\vec{C} = (2; -2)$$

Si se pide la fuerza total hay que sumar los vectores

$$\vec{A} = (-1; 3)$$

$$\vec{B} = (3; 2)$$

$$\vec{C} = (2; -2)$$

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (-1 + 3 + 2; 3 + 2 + (-2))$$

$$\vec{R} = (4; 3)N$$

El módulo del vector

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2}$$

$$R = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$R = 5N$$

Nota 22 La fuerza que se necesita para extraer la masa extraña del hoyo se obtiene al sumar la fuerza de las tres grúas.

Determinar la distancia que recorre un mensajero, si el camino que sigue es en línea recta para llegar desde el lugar donde hizo su última entrega A, ubicada en el punto (2; 2) km hasta el sector B ubicado en el punto (14; 18) km. La distancia está representada por el vector AB.

a) 20 km

b) 10 km

c) 5 km

d) 1 km

Solución

Se necesita el vector desplazamiento que se obtiene de la diferencia de vectores B-A.

$$\vec{B} = (14; 18)$$

$$\vec{A} = (2; 2)$$

$$\vec{B} - \vec{A} = (14 - 2; 18 - 2)$$

$$\vec{R} = (12; 16)km$$

Módulo del vector

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2}$$

$$R = \sqrt{12^2 + 16^2}$$

$$R = 20km$$

Nota 23 La distancia recorrida vectorialmente, para dos puntos se da por la diferencia entre la posición final menos la posición inicial.

2.10.1. Ejercicios propuestos

Un taxista desea hacer una carrera a un usuario que se encuentra en el punto (-5; -2) m, mientras que él se encuentra en la posición (3, 2) m. Determinar las componentes del vector

a) $Ax = 8, Ay = 4$

b) $Ax = -8, Ay = -4$

c) $Ax = 2, Ay = 0$

d) $Ax = -2, Ay = 0$

Se conoce que la magnitud de un vector es 8km, y forma un ángulo de 90° con el eje positivo de las abscisas. Determinar sus coordenadas rectangulares.

a) $\vec{C} = (0; 8)km$

b) $\vec{C} = (0; -8)km$

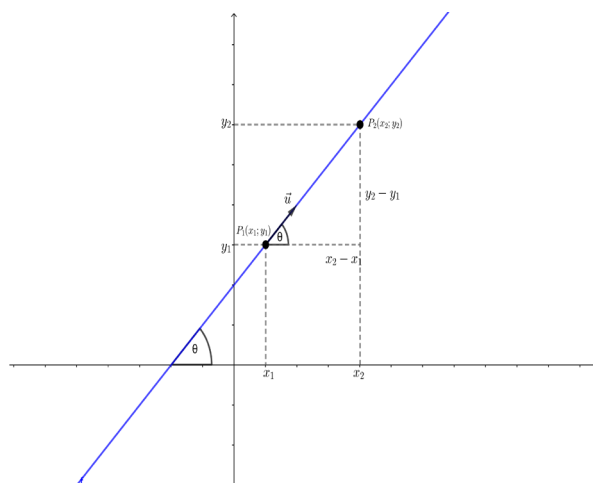
c) $\vec{C} = (8; 0)km$

d) $\vec{C} = (-8; 0)km$

2.11. El espacio vectorial R2: Rectas en R2

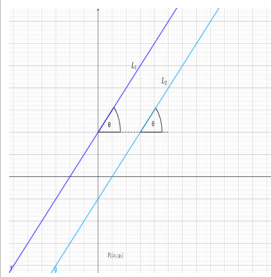
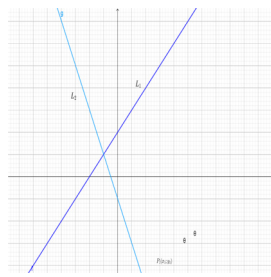
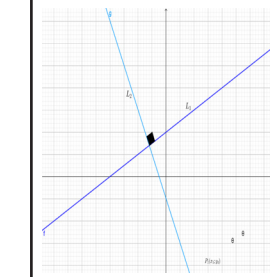
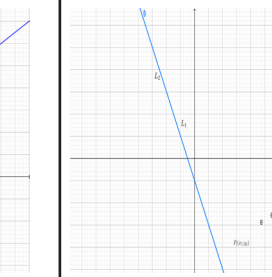
La recta

Es un conjunto infinito de puntos que se encuentran alineados en la misma dirección. Existen varias maneras de representar la recta.



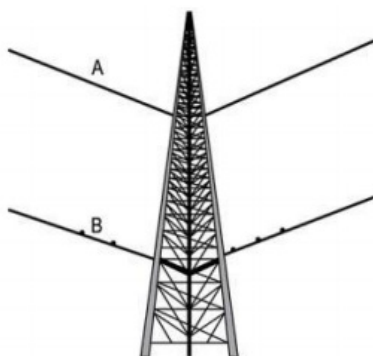
Forma	Descripción
Vectorial $(x, y) = (x_0, y_0) + t(u_1, u_2)$	Permite determinar la ecuación de la recta si se conoce un punto de la recta $A(x_0, y_0)$ y el vector director $\vec{u}(u_1, u_2)$
Paramétrica $\begin{cases} x = x_0 + t \cdot u_1 \\ y = y_0 + t \cdot u_2 \end{cases}$	Permite determinar la ecuación de la recta $A(x_0, y_0)$ mediante el sistema de ecuaciones donde se conoce un punto de la recta y el vector director $\vec{u}(u_1, u_2)$
General $Ax + By + C = 0$	Forma general de representación, ecuación lineal con dos variables.
Punto- punto $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$	Permite determinar la ecuación de la recta cuando se conoce dos de sus puntos
Punto- pendiente $y - y_1 = m (x - x_1)$	Permite determinar la ecuación de la recta cuando se conoce uno de sus puntos y su pendiente.
Pendiente y ordenada al origen $y = mx + b$	Se caracteriza por tener despejada la y, el coeficiente de la variable x es la pendiente y b la ordenada como término independiente.
Simétrica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	Está determinada sobre los ejes de coordenadas, donde $a \neq 0$ es la intersección con el eje de las abscisas, $b \neq 0$ es la intersección con el eje de las ordenadas.

2.12. Relación entre líneas rectas

Rectas paralelas	Rectas secantes		Rectas consecuentes
	Oblicuas	Perpendiculares	
Son rectas que nunca se cortan	Son rectas que se cortan formando ángulos diferentes entre si	Son rectas que se cortan formando cuatro ángulos rectos	Son dos rectas que coinciden en el mismo lugar
Pendiente $m_1 = m_2$	Pendiente $m_1 \neq m_2$	Pendiente $m_1 \cdot m_2 = -1$	Pendiente $m_1 = m_2$
			

2.13. Ejercicios Resueltos

En una torre de telecomunicaciones existen dos cables A y B como se muestra en la imagen. El cable A persigue la ecuación $4y - 12x + 2 = 0$ y el cable B la ecuación $cy - 18x - 4 = 0$. Si es necesario que los cables sean paralelos, que valor debería tener la variable c .



Solución

Despejar y en las dos ecuaciones

$$\begin{aligned}
 4y - 12x + 2 &= 0 & cy - 18x - 4 &= 0 \\
 4y &= 12x - 2 & cy &= 18x + 4 \\
 y &= \frac{12x}{4} - \frac{2}{4} & y &= \frac{18x}{c} + \frac{4}{c} \\
 y &= 3x - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Igualar el valor de las pendientes

$$\begin{aligned}
 \frac{18}{c} &= 3 \\
 c &= 6
 \end{aligned}$$

Nota 24 Las rectas paralelas tienen la misma pendiente

a) 3

b) -3

c) -6

d) 6

2.13.1. Ejercicios propuestos

Del siguiente conjunto de rectas identifique cuál de ellas son paralelas

- a. $y = 5x - 1$
- b. $y = -3x + 1$
- c. $y = -5x - 1$
- d. $y = 3x + 5$
- e. $y = 3x + 1$

- a. a, c
- b. b, d
- c. d, e
- d. b, e

Del siguiente conjunto de rectas identifique cuál de ellas son perpendiculares

- a. $y = 5x + 9$
- b. $y = -3x + 1$
- c. $y = -5x + 9$
- d. $y = -3x + 8$
- e. $y = -3x + 3$

- a. a, c
- b. b, d
- c. d, e
- d. c, b

2.14. Aplicaciones geométricas en R2: Curvas planas en R2

2.14.1. La circunferencia

Es el lugar geométrico de todos los puntos en un plano que equidistan de otro punto fijo y coplanario llamado centro.

Donde:

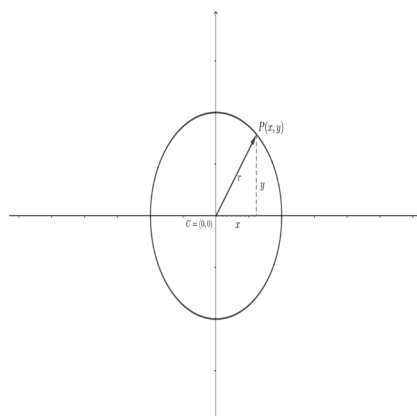
Centro: es el punto equidistante de todos los puntos de la circunferencia

Radio: segmento que une el centro de la circunferencia con un punto de la circunferencia

Diámetro: es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y que pasa obligatoriamente por el centro de este.

2.15. La circunferencia con centro en el origen (0,0)

Cuando el centro de la circunferencia es el origen $C=(0,0)$, se obtiene la expresión canónica



Demostración

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

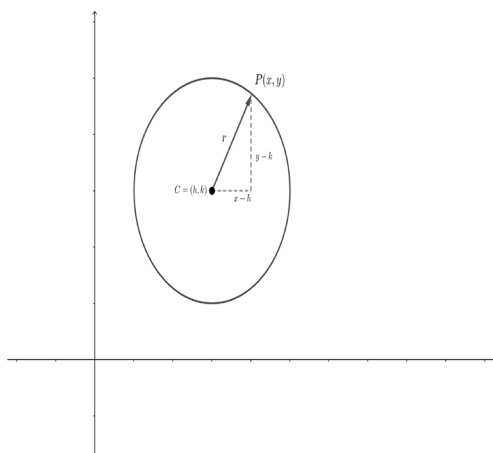
Distancia entre dos puntos

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

Ecuación ordinaria

2.16. La circunferencia con centro en un punto (h,k)

La circunferencia con centro en el punto $C=(h,k)$, y otro punto distinto $P=(h,k)$ del origen con una distancia r , se obtiene la expresión ordinaria.



Demostración

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Distancia entre dos puntos

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

Ecuación ordinaria

2.17. Ecuación en forma general de la circunferencia

La ecuación general de la circunferencia se obtiene desarrollando la ecuación ordinaria.

Demostración

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

Ecuación ordinaria

$$r^2 = x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2$$

Binomio al cuadrado

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ecuación general

Donde:

$$D = -2h$$

$$E = -2k$$

$$F = +h^2 + k^2 - r^2$$

Centro y radio de la circunferencia

Centro: $O = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$

Radio: $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

2.18. Ejercicio Resuelto

Un helicóptero al girar sus hélices forma una circunferencia que tiene como ecuación: , como se indica en la figura



Con referencia en el caso, ¿cuál es el radio en metros que forman las hélices de helicóptero?

Solución

Con la ecuación en su forma general

$$x^2 + y^2 - 12x + 10y + 36 = 0 \text{ con referencia}$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ se tiene:}$$

$$D = -12$$

$$E = 10$$

$$F = 36$$

Reemplazar los datos en la ecuación de la longitud del radio

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{-12^2 + 10^2 - 4(36)}$$

$$r = \frac{1}{2}(\sqrt{100})$$

$$r = \frac{1}{2}(10)$$

a) $\sqrt{10}$

b) 10

c) $\sqrt{5}$

d) 5

Nota 25 Es fundamental reconocer la forma general de la circunferencia

2.19. LA PARÁBOLA

Es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano equidistan a un punto fijo llamado vértice y una recta denominada directriz.

2.19.1. Elementos de la parábola

Directriz es una recta fija, donde cada uno de los puntos de la parábola equidista de la directriz y el foco

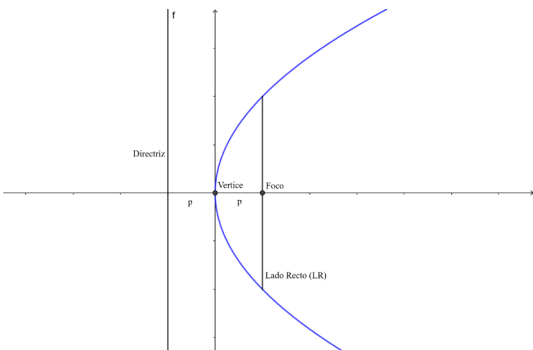
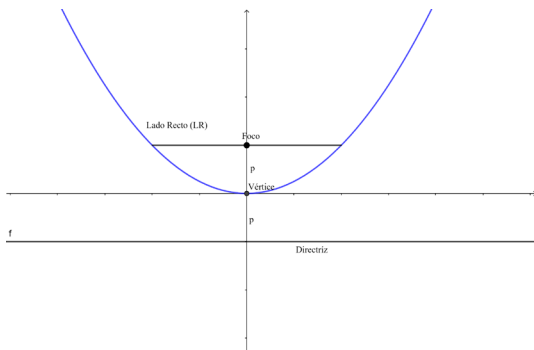
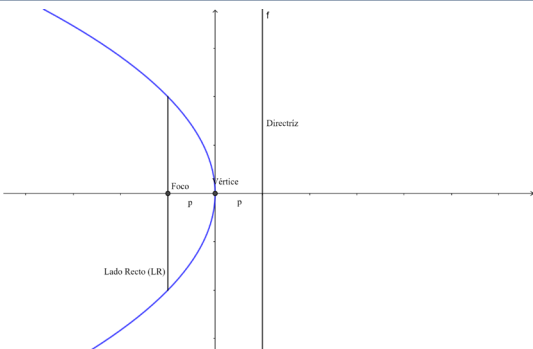
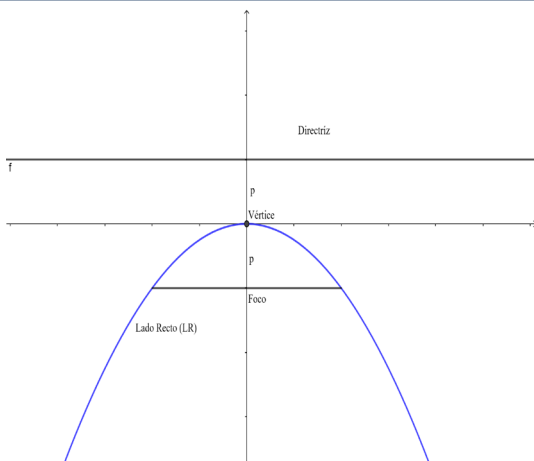
Foco es un punto fijo, donde cada uno de los puntos de la parábola equidista de la directriz y el foco

Vértice es el punto medio entre el foco y la directriz

Lado recto La cuerda, perpendicular al eje focal, que contiene al foco y corta a dos puntos de la parábola.

2.20. La parábola con el vértice en el origen (0,0)

Cuando el vértice de la parábola está en el origen , se considera.

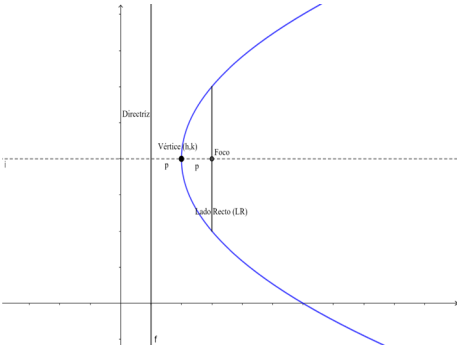
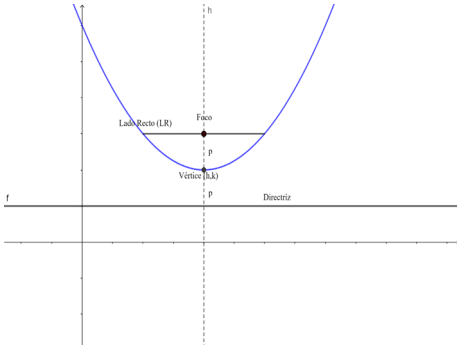
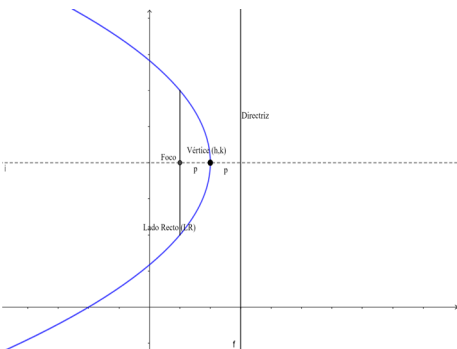
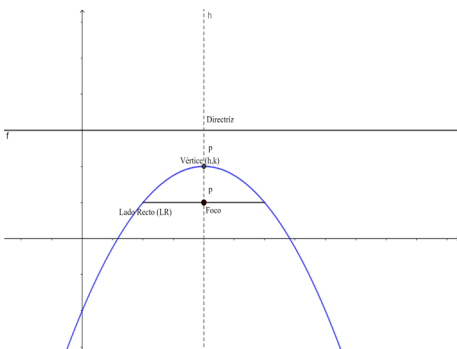
Horizontal	Vertical
Ecuación	Ecuación
$y^2 = 4px$	$x^2 = 4py$
	
Ecuación	Ecuación
$y^2 = -4px$	$x^2 = -4py$
	

P: distancia entre el vértice y el foco

LR: lado recta; recta paralela a la directriz que se encuentra dentro de la parábola y pasa por el foco $LR = |4p|$. En efecto si el foco está arriba o a la derecha del vértice la ecuación es positiva, y si esta abajo a la izquierda es negativa.

2.21. La parábola con vértice en el punto

Cuando el vértice de la parábola está en cualquier punto , se considera.

Horizontal	Vertical
Ecuación $(y - k)^2 = 4p(x - h)$	Ecuación $(x - h)^2 = 4p(y - k)$
	
Ecuación $(y - k)^2 = -4p(x - h)$	Ecuación $(x - h)^2 = -4p(y - k)$
	

Ecuación en forma general

$$Ax^2 + Cx^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si $C = 0$, el eje focal es paralelo al eje y

Si $A = 0$, el eje focal es paralelo al eje x

2.22. Ejercicios Resueltos

Una pastelería desea vender un x números de pasteles de un nuevo sabor a un costo c , en dólares por unidad, el costo está dado por la ecuación $2c + 0.1x = 1000$ y el ingreso en dólares está dado por $I = 50x - 0.05x^2$. Determinar el costo que deben de tener los pasteles para obtener mayor ingreso.

Solución

Los ingresos corresponden a una función parabólica
El vértice representa el mayor ingreso en determinado número de ventas de pasteles

Para encontrar la componente en x se usa $x = \frac{-b}{2a}$

Donde: $I = 50x - 0.05x^2$

$b = 50$

$a = -0.05$

Reemplazo

$x = \frac{-b}{2a}$

$x = \frac{-50}{2(-0.05)}$

$x = 500$

Con 500 pasteles se puede obtener el mayor ingreso, para saber el costo reemplazo el valor x en la ecuación

$2c + 0.1x = 1000$

$2c + 0.1(500) = 1000$

$2c = 1000 - 0.1(500)$

$2c = 950$

$c = 475$

a) 500

b) 550

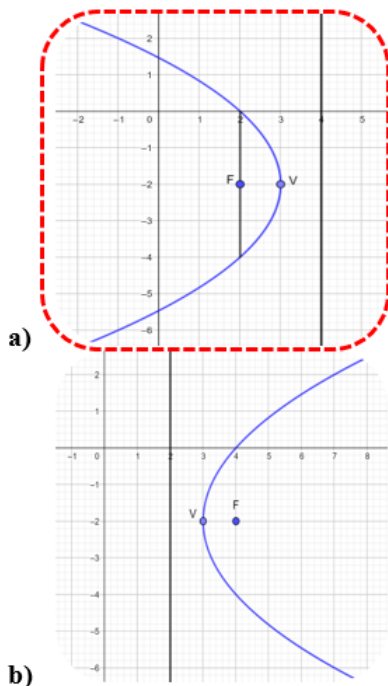
c) 475

d) 450

Nota 26 Cuando el valor de a en la forma general de la parábola es positivo, la función es una parábola cóncava hacia abajo y el valor máximo, en este caso el mayor ingreso será el valor que tome el vértice.

Identifique la gráfica de la ecuación

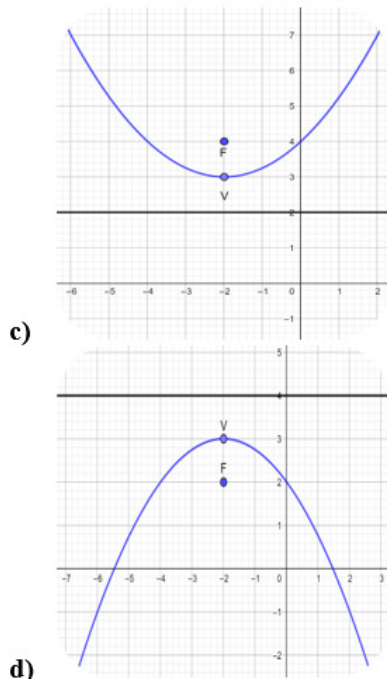
$(y + 2)^2 = -4(x - 3)$



Solución

Identificar los parámetros de la ecuación

- Por la ecuación se sabe, que se abre en el eje de las abscisas $(y + 2)^2$
- $(y - k)^2 = 4p(x - h)$
- $(y + 2)^2 = -4(x - 3)$
- $k = -2$ $h = 3$
- Como es una parábola con vértice en el punto (h, k)
- Vértice $(-2, 3)$



Nota 27 Se abre en el eje abscisas $\square (y-k) \square ^2=4p(x-h)$

2.23. La Elipse

Lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos son constantes.

2.23.1. Elementos de la elipse

Focos son dos puntos fijos

Eje focal es la recta que pasa por los focos

Radios vectores son los segmentos que unen un punto de la elipse a los focos

Distancia focal es dos veces el valor de la semidistancia focal ($2c$)

Semidistancia focal es la distancia entre el centro y cada foco (c)

Vértices puntos de intersección de la elipse con los ejes

Eje mayor es dos veces el valor del semieje mayor ($2a$)

Semieje mayor es el segmento que une el centro y los vértices del eje focal (a)

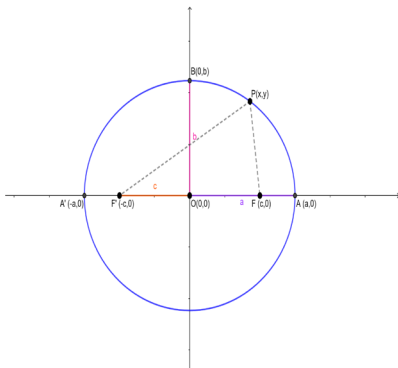
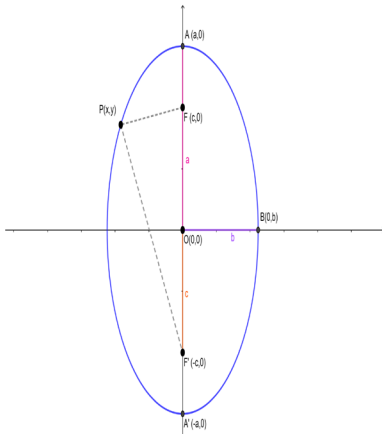
Eje menor es dos veces el valor del semieje menor ($2b$)

Semieje menor segmento entre el centro y los vértices de eje secundario (b)

Ejes de simetría son rectas que contienen el eje mayor o menor

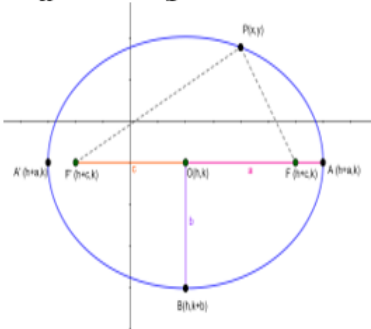
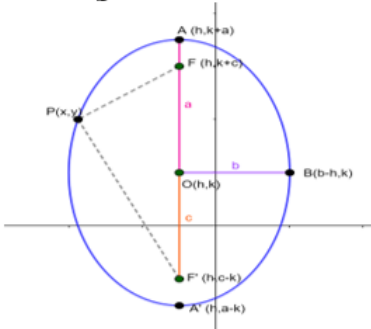
2.24. Elipse con centro en el origen (0,0)

Cuando el centro de la elipse se encuentra en el origen $O(0,0)$ se considera

Horizontal	Vertical
Ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Ecuación $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$
	

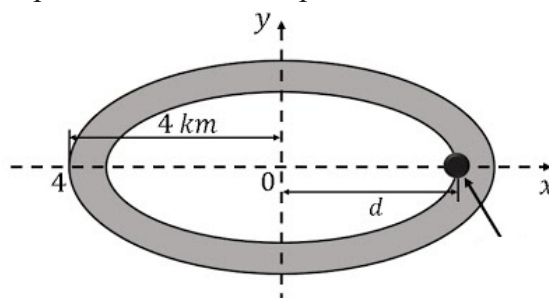
2.25. Elipse con el centro en un punto (h,k)

Si el centro de la elipse se encuentra en cualquier punto $P = (h, k)$, se considera.

Horizontal	Vertical
Ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	Ecuación $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
	

2.26. Ejercicio Resuelto

Se desea hacer la transmisión de una carrera de velocidad en una pista elíptica, cuya longitud del semieje mayor es de 5km y la del semieje menor es de dos kilómetros menos que la del semieje mayor, si se desea colocar 2 cámaras de video en los focos de la elipse, Determinar la distancia focal d , en kilómetros con respecto al centro de la pista.



Solución.

Como:

El semieje mayor es 5 km

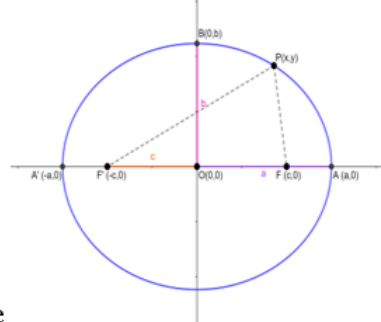
El semieje menor es $5 \text{ km} - 2 \text{ km} = 3 \text{ km}$

a) 8

b) 7

c) 6

d) 4



Es entonces que se tiene

$$a = 5 \text{ km}$$

$$b = 3 \text{ km}$$

$$c = ?$$

Utilizar el teorema de Pitágoras al hallar el valor de c

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{5^2 + 3^2}$$

$$c = \sqrt{25 - 9}$$

$$c = 4$$

Nota 28 Semieje mayor = a

Semieje menor = b

Distancia del centro al foco = c

2.27. La hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos en un plano donde la diferencia de las distancias a los puntos fijos llamados focos es constante.

2.27.1. Elementos de la hipérbola

Focos son puntos fijos donde la distancia entre ellos y cualquier punto de la hipérbola es siempre la misma

Eje focal es la recta que pasa por los focos

Centro punto donde se interseca el eje focal y secundario

Semi-distancia focal es la mitad de la distancia entre los focos (c)

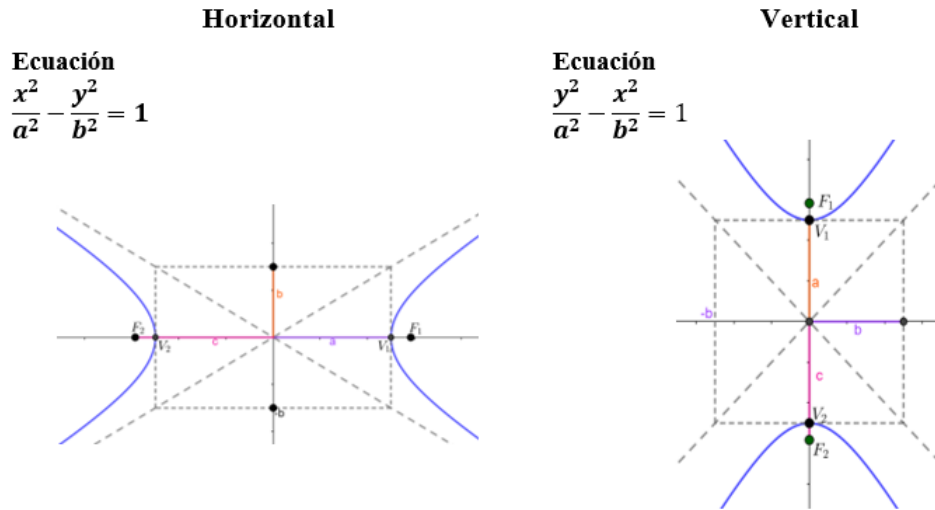
Distancia focal es la distancia que une los dos focos ($2c$)

Vértices son los puntos de la hipérbola que cortan el eje focal

Semieje mayor el segmento que une el origen con cualquiera de los vértices (a)

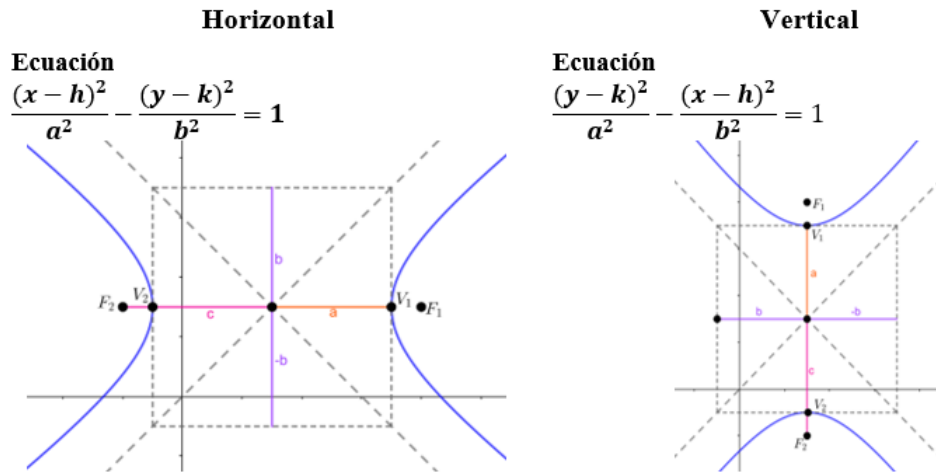
2.28. Hipérbola con centro en el origen (0,0)

Cuando el centro de la hipérbola se encuentra en el origen se considera.



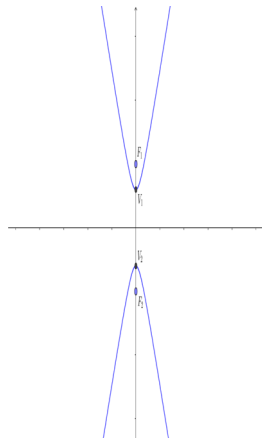
2.29. Hipérbola con el centro en un punto (h,k)

Si el centro de la hipérbola se encuentra en cualquier punto $P = (h, k)$, se considera.



2.30. Ejercicio Resuelto

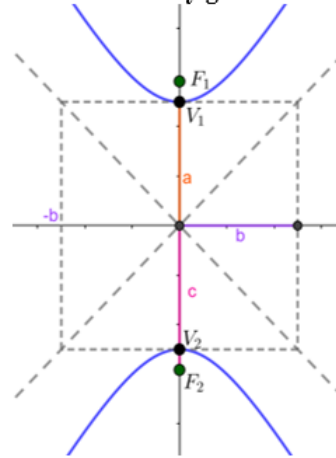
Determinar la ecuación de la hipérbola conociendo los siguientes datos $V = (0 \pm 12)$ y $F(0 \pm 13)$, como se muestra en la figura.



Solución

Como se ve en la gráfica el centro de la hipérbola es $O(0,0)$, con una orientación vertical

Con estos datos analizar la ecuación y gráfica correspondiente



a) $\frac{y^2}{12^2} - \frac{x^2}{13^2} = 1$

b) $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$

c) $\frac{x^2}{12^2} - \frac{y^2}{13^2} = 1$

d) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Teniendo así

$$a = \pm 12$$

$$c = \pm 13$$

Para encontrar el valor de b se usa el teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$13^2 = 12^2 + b^2$$

$$13^2 - 12^2 = b^2$$

$$b^2 = 25$$

$$b = 5$$

Finalmente la ecuación

$$\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$$

Nota 29 Cuando se requiera el valor de semieje mayor (a), semieje menor (b) y Semidistancia focal (c), usar el teorema de Pitágoras.

2.30.1. Ejercicios propuestos

En un puente que tiene forma de arco se conoce que la directriz es $x=3$ y su foco está ubicado en $(-3; 0)$. Encontrar la ecuación en forma ordinaria.

a. $x^2 = -12y$

b. $x^2 = 12y$

c. $y^2 = -12x$

d. $y^2 = 12x$

Considerando los puntos extremos del diámetro de un círculo $(-7; -8)$ y $(9; 4)$. Hallar la ecuación ordinaria

a. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$

b. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9^2$

c. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 81$

d. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$

La ecuación de una elipse en forma general es $16x^2 + 9y^2 + 64x + 18y - 71 = 0$. Hallar el centro de esta.

- a. (1; 2)
- b. (2; -3)
- c. (-2; 3)
- d. (-2; -1)

$9y^2 - 4x^2 - 36 = 0$ es la ecuación general de una hipérbola ¿Cuál es su ecuación en forma ordinaria?

- a. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
- b. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$
- c. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$
- d. $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{9} = 1$

2.31. Programación lineal

Es un algoritmo matemático con el cual se puede resolver situaciones reales a través de un sistema de inecuaciones lineales, con el objetivo de optimizar (minimizar o maximizar) una función lineal, en donde las variables de dicha función están sujetas a restricciones.

2.31.1. Elementos

Función Objetivo: Función lineal que se desea optimizar

Variables: Son factores controlables de la función, que pueden tomar varios valores precisando conocer su valor óptimo que facilite obtener el objetivo.

Restricciones: Son limitaciones en los valores que pueden tomar las variables, expresadas por inecuaciones lineales

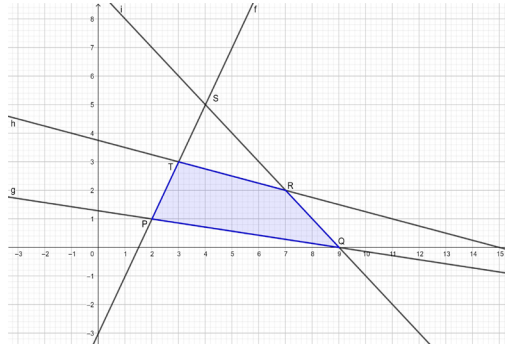
2.31.2. Pasos para la solución de problemas de programación lineal

1. Identificar la formulación del problema central
2. Determinar las variables, mismas que están asociadas a la pregunta
3. Determinar las restricciones que están dadas por inecuaciones mismas que no pueden ser negativas
4. Determinar la función objetivo, que se refiere al consumo o beneficio
5. Graficar el sistema de ecuaciones lineales y determine la región factible
6. Calcular la región óptima.

2.32. Ejercicios Resueltos

Una empresa exportadora de atún realiza un balance de la venta semestral de dos de sus productos más vendidos, los del tipo A y los del tipo B, la siguiente gráfica representa las restricciones para

la cantidad vendida en cientos de toneladas.



Si se conoce que la venta por tonelada del tipo A es de USD 55 la tonelada y del tipo B es de USD 45, determine la ganancia máxima, en dólares que tendrá la exportadora si genera un gasto fijo de USD 350.

a) 38120

b) 49150

c) 56851

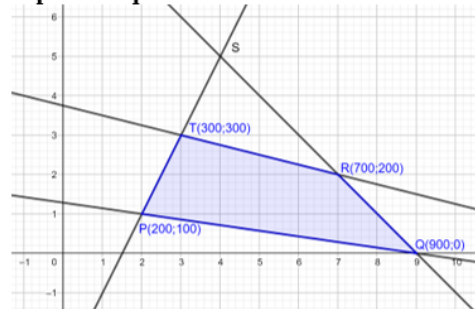
d) 62458

Solución

1.- formular la función objetivo

$$f(x, y) = 55x + 45y - 350$$

2.- identificar las restricciones que se presentan en la gráfica, sin considerar el punto S que no está dentro del área sombreada.



3.- reemplazar los valores de las restricciones en la función objetivo

Punto P

$$f(x, y) = 55(200) + 45(100) - 350$$

$$f(x, y) = 15150$$

Punto Q

$$f(x, y) = 55(900) + 45(0) - 350$$

$$f(x, y) = 49150$$

Punto

$$f(x, y) = 55(700) + 45(200) - 350$$

$$f(x, y) = 47150$$

Punto T

$$f(x, y) = 55(300) + 45(300) - 350$$

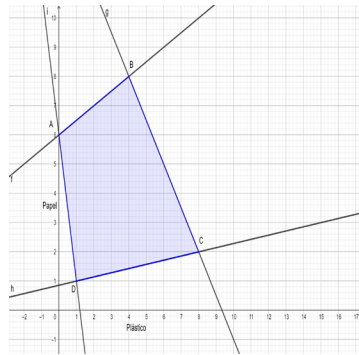
$$f(x, y) = 29650$$

R

4.- Como el ejercicio nos pide ganancia máxima, concluimos que con 900 productos del tipo A y 0 productos del tipo B se obtiene una ganancia máxima de 49150 USD.

Nota 30 ya identificadas las restricciones, para optimizar el tiempo, se deberían analizar los valores de las restricciones que podrían salir valores altos al reemplazar en la función objetivo, es decir los valores más alejados a los ejes de coordenadas.

Si fabricar 100 fundas plásticas cuesta USD 0.25 y la fabricación de 100 fundas de papel cuesta USD 0.45, determinar el costo de fabricación máximo considerando un costo fijo de USD 10. La siguiente gráfica esta expresada en cientos de dólares.

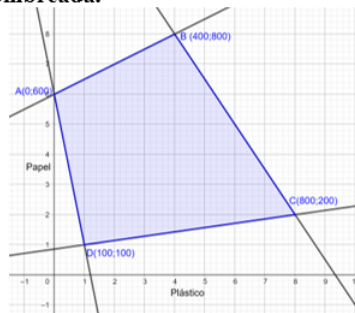


Solución

- a) 470
- b) 500
- c) 320
- d) 280

1.- Formular la función objetivo
 $f(x, y) = 0,25x + 0,45y + 10$

2.- identificar las restricciones que se presentan en la gráfica, es decir los puntos del área sombreada.



3.- reemplazar los valores de las restricciones en la función objetivo

Punto A

$$f(x, y) = 0,25(0) + 0,45(600) + 10$$

$$f(x, y) = 280$$

Punto B

$$f(x, y) = 0,25(400) + 0,45(800) + 10$$

$$f(x, y) = 470$$

Punto C

$$f(x, y) = 0,25(800) + 0,45(200) + 10$$

$$f(x, y) = 300$$

Punto D

$$f(x, y) = 0,25(100) + 0,45(100) + 10$$

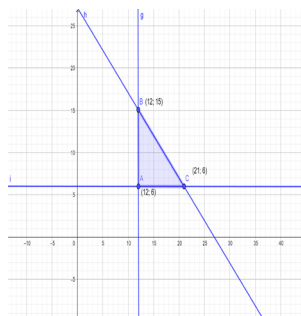
$$f(x, y) = 80$$

4.- Como el ejercicio pide el costo de fabricación máximo, se concluye que es de USD 470

Nota 31 En la función objetivo hay que tener muy en cuenta lo que dice el enunciado, cuando menciona la palabra costo que se lo asimila con gasto.

2.32.1. Ejercicios propuestos

En la gráfica se representa en su área sombreada la solución factible de un problema de programación lineal.



Determinar la solución óptima del sistema que permite maximizar la función objetivo $2x+y$

- a) 27
- b) 39
- c) 48
- d) 30

Una fábrica de papel higiénico, produce una utilidad para el papel industrial y el papel de cocina. Cuando los niveles de producción son de x y y toneladas al mes, respectivamente. La utilidad está dada por $p = x + 8y + 100$.

Determinar el valor que al maximizar la utilidad, conociendo los puntos que limitan la región factible, $A = (2; 4)$, $B = (5; 4)$, $C = (4; 0)$, $D = (6; 0)$

- a) 106
- b) 137
- c) 134
- d) 116

CAPÍTULO 3

Estadística y probabilidad

3.1. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Es una rama de la matemática que recolecta, analiza, presenta y caracteriza un conjunto de datos, para que mediante medidas de resumen, tablas o gráficos describir y caracterizar el comportamiento de dichos conjuntos.

3.2. Tipos de variables

Variable cualitativa: Son aquellas que pueden tomar como valores cualidades, por ejemplo: sexo, raza, color de ojos.

Variable cuantitativa Son aquellas que toman valores numéricos, por ejemplo: peso, altura, número de hijos.

3.3. Distribución de frecuencias

Tablas de frecuencia de datos no agrupados: representan la información contenida de una muestra de tamaño n en tablas.

Xi	Fi	Fi	Hi	Hi
Datos	Frecuencia Absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
Datos sin repetir que existen en un determinado estudio	Es el número de veces que aparece un determinado valor, y La suma de las frecuencias absolutas es igual al número total de datos	Es la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores inferiores o iguales al valor considerado.	Es el cociente entre la frecuencia absoluta de un determinado valor y el número total de datos. La suma de las frecuencias relativas es 1	Es la suma de las frecuencias relativas de todos los valores inferiores o iguales al valor considerado.

3.4. Medidas de tendencia central

Son medidas que proporcionan valores de los cuales se distribuyen los datos de la muestra.

Media Aritmética o promedio	Mediana	Moda
Es aquella medida que se obtiene al dividir la suma de todos los valores de una variable por el número de datos existentes $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$	Es el valor central de un conjunto de valores ordenados en forma creciente o decreciente.	Es la medida que indica cual dato tiene la mayor frecuencia en un conjunto de datos; o sea, cual se repite más.

Tabla de frecuencia con datos agrupados- es ordenar en forma de tabla los datos estadísticos, esto se emplea siempre y cuando las variables toman un número grande de valores

Nº	i	Conteo	fi	Fi	Hi	Hi
Número de grupos	Intervalos	conteo	Frecuencia Absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
Indicará el NÚMERO DE GRUPOS en los que agruparemos los datos.	Constan de un límite inferior y un límite superior separados por una AMPLITUD	Son los datos obtenidos	Es el número de veces que aparece un determinado valor, y La suma de las frecuencias absolutas es igual al número total de datos	Es la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores inferiores o iguales al valor considerado	Es el cociente entre la frecuencia absoluta de un determinado valor y el número total de datos. La suma de las frecuencias relativas es 1	Es la suma de las frecuencias relativas de todos los valores inferiores o iguales al valor considerado
	Límite inferior → 5 8 ← Límite superior					

3.5. Varianza y desviación estándar

	Varianza	Desviación estándar	
Población	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \cdot f_i}{N}$	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$	$N = \text{número total de datos}$
Muestra	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n - 1}$	$s = \sqrt{s^2}$	$\mu = \text{media}$ $n = \text{número total de datos}$ $\bar{x} = \text{media}$

3.6. Ejercicios Resueltos

Los estudiantes de un curso de estadística calculan el promedio de cuatro notas más la calificación de una prueba, como se indica en la tabla

	Nota 1	Nota 2	Nota 3	Nota 4	Promedio
Estudiante	x_1	x_2	x_3	x_4	6,5

Si un alumno obtuvo una media de 6,5 puntos en las cuatro calificaciones, cuál debería ser la nota de la prueba para que al sumarla con el total de las cuatro calificaciones el estudiante tenga una media de 7 puntos y no presentarse a la recuperación.

Solución

1.- la media de las cuatro calificaciones está dada por

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Reemplazar los datos

$$6,5 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{4}$$

Despejar

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 26$$

a) 6

b) 7

c) 9

d) 8

2.- Al añadir la nota de la prueba en la media

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + m}{n}$$

Donde m es la nota del examen, y la media cambia ya que el enunciado indica que el estudiante desea tener una calificación de 7 puntos

$$7 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + m}{5}$$

Como se aumentó un valor al promedio de calificaciones, ahora son 5

Despejar el valor de m

$$7 = \frac{26 + m}{5}$$

$$35 = 26 + m$$

$$m = 35 - 26$$

$$m = 9$$

Nota 32 Los distractores son x_1, x_2, x_3, x_4 al no darle valores, asumen que es lo que se debe encontrar.

Con el uso de una tabla de frecuencias se tabulan los resultados de una encuesta que se realizó a una muestra de estudiantes universitarios, sobre el consumo de bebidas alcohólicas, pero por error en la impresión solo se puede leer una parte de la información. Como se observa en la tabla, determinar la varianza.

Intervalo	Fi	Xi	(Xi - X) ²	(Xi - X) ² · fi
Total	41		Total	800

Solución

1.- con la fórmula de varianza para una muestra

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n - 1}$$

a) 40

b) 30

c) 20

d) 10

2.- reemplazar los datos del problema

$$s^2 = \frac{800}{41 - 1}$$

$$s^2 = \frac{800}{40}$$

$$s^2 = 20$$

Nota 33 Identificar los datos, y reemplazar en la fórmula de varianza para muestra

Dominio Matemático

Una academia culinaria, dicta cursos de temas y costos diferentes, su dueño realizó un análisis del cursos de los cursos y el número de participantes, obteniendo los datos de la tabla:

Costo por curso (x_i)	Participantes (f_i)	($x_i \cdot f_i$)	($x_i - \bar{x}$)	($x_i - \bar{x}$) ²	($x_i - \bar{x}$) ² · f_i
7	14	98	-3,36	11,29	158,06
10	13	130	-0,36	0,13	1,69
12	9	108	1,64	2,69	24,21
15	8	120	4,64	21,53	172,24
Total	44	456		35,64	356,2

Con base en los datos, determinar la varianza

Solución

1.- el ejercicio pide la varianza con respecto de los datos, si el dueño realizó el análisis de su academia, se considera la fórmula de la varianza para población

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \cdot f_i}{N}$$

a) 8

b) 7,9

c) 8,1

d) 8,5

2.- reemplazar datos

$$\sigma^2 = \frac{356,2}{44}$$

$$\sigma^2 = 8,10$$

Nota 34 Identificar los datos, y reemplazar en la fórmula de varianza para población

3.6.1. Ejercicios propuestos

La administración del parque Nacional Cotopaxi realiza un análisis de las edades de los visitantes menores de edad al parque, un día de poca afluencia y el número de personas, obteniendo los datos de la tabla:

Edades (x_i)	Visitantes (f_i)	($x_i \cdot f_i$)	($x_i - \bar{x}$)	($x_i - \bar{x}$) ²	($x_i - \bar{x}$) ² · f_i
7	4	28	2,5	6,25	24,96
12	3	36	7,5	56,25	168,75
15	6	90	10,5	110,25	661,5
17	5	85	12,5	156,25	781,25
Total	18	239	33	329	1636,46

Con base en los datos, determinar la varianza

a. 80,90

b. 90,91

c. 80,91

d. 90,90

Los estudiantes de bachillerato calculan el promedio de cuatro notas más la calificación de una prueba, como se indica en la tabla

	Nota 1	Nota 2	Nota 3	Nota 4	Promedio
Estudiante	x1	x2	x3	x4	8

Si un alumno obtuvo una media de 9 puntos en las cuatro calificaciones, cuál debería ser la nota de la prueba para que al sumarla con el total de las cuatro calificaciones el estudiante tenga una media de 9 puntos y no presentarse a la recuperación.

- a) 5
- b) 6
- c) 7
- d) 8

3.7. Probabilidad Elemental

Probabilidad: Es una rama de la matemática que estudia los resultados posibles, resultados de ciertos experimentos o fenómenos aleatorios.

3.8. Conceptos básicos

Suceso: Es cada uno de los resultados de un experimento

Espacio muestral: Conjunto de todos los posibles resultados de un experimento

Suceso aleatorio: Subconjunto del espacio muestral

3.9. Probabilidad clásica

La probabilidad clásica se tiene siempre y cuando todos los sucesos tienen la misma probabilidad de ocurrir, según la ley de Laplace está dada por la razón entre el número de casos favorables, y el número total de casos.

$$P(A) = \frac{N^{\circ} \text{ de casos favorables}}{N^{\circ} \text{ de casos posibles}} = \frac{m}{N}$$

La suma de todas las probabilidades no debe de pasar del valor de 1, de lo contrario es probable que haya un error en el cálculo de la probabilidad

3.10. Ejercicios Resueltos

Un naipe clásico tiene 52 cartas, la mitad de ellas son negras y la otra mitad son rojas ¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta negra no numérica?

Solución

1.- un juego de barajas contiene 52 cartas, 13 diferentes (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K), y de cada una de ellas existen 4, dos rojas y dos negras.

2.- si el ejercicio nos pide cartas negras no numéricas, se refiere: (A, J, Q, K) en color negro eso quiere decir que los casos favorables son 8 cartas.

3.- los casos totales son 52 cartas.

4.- reemplazar en la ecuación de Laplace

$$P(A) = \frac{N^{\circ} \text{ de casos favorables}}{N^{\circ} \text{ de casos posibles}} = \frac{m}{N}$$

$$P(A) = \frac{8}{52} = \frac{1}{13}$$

Nota 35 Interpretar el texto, los distractores son “carta negra o numérica”

Tres autos de carrera (A, B y C) están en mantenimiento para mejorar su rendimiento en una pista plana. Para verificar si se efectuó una mejoría se los pone en carrera, donde se dice que el auto C tiene el triple de probabilidad de ganar que A, y A el doble que B. Calcular la probabilidad que gane A.

Solución

- a) $\frac{1}{9}$
- b) $\frac{2}{9}$
- c) $\frac{1}{3}$
- d) $\frac{2}{3}$

1.- Para encontrar el número total de casos posibles

A: $2x$

B: x

C: $6x$

Plantar ecuaciones con respecto al enunciado

2.- sumar el total casos posibles CT: $9x$

3.- como el enunciado me pide la probabilidad que gane A, se aplica la fórmula de Laplace

$$P(A) = \frac{N^{\circ} \text{ de casos favorables}}{N^{\circ} \text{ de casos posibles}} = \frac{2x}{9x}$$

$$P(A) = \frac{2}{9}$$

Nota 36 Identificar el auto del que no se habla, para establecer la variable X de esta forma las comparaciones que realiza es más fáciles de interpretar.

3.10.1. Ejercicios propuestos

En dos instituciones educativas se realizan pruebas de conocimiento, la probabilidad de que aprueben los docentes de la institución X es de 0.90 y los de la institución Y del 0.96. El inspector encargado toma una evaluación al azar y resulta que está aprobada. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de un docente de la institución X?

- a. $\frac{3}{7}$
- b. $\frac{2}{3}$
- c. $\frac{1}{3}$
- d. $\frac{5}{7}$

En una panadería se sabe que tienen entre pan de gusano y pan de enrollado 60 panes de los cuales 40 son pan de gusano, también se sabe que la tercera parte de los panes de gusano son del día anterior, ¿Cuál es la probabilidad de escoger un pan enrollado que sea hecho del mismo día?

- a. 40%
- b. 30%
- c. 66,66%
- d. 25%

Una academia de baile tiene 100 estudiantes, de los cuales 60 les gusta el ballet y de estos 20 son niños, si en total hay 35 niños, ¿Cuál es la probabilidad de escoger a alguien que guste de bailar tango?

- a. 20%
- b. 40%
- c. 50%
- d. 60%

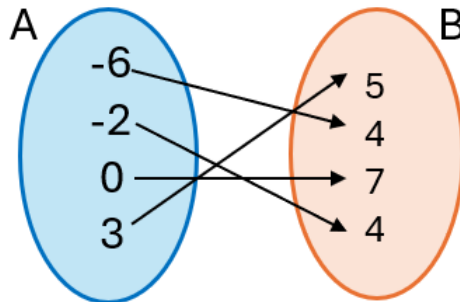
ANEXOS

En un centro de revisión vehicular se obtuvo, mediante un osciloscopio, un conjunto de pares ordenados de la señal de un sensor de automóvil, que permite establecer el tipo de onda que se genera, como se indica a continuación:

$$A = \{(-6; 4), (-2; 4), (0; 7), (-2; 8), (3; 5), (0; 4)\}$$

- a) $(-6; 4), (0; 7), (3; 5), (0; 4)$
- b) $(-6; 4), (-2; 4), (0; 7), (3; 5)$**
- c) $(-6; 4), (0; 7), (-2; 8), (0; 4)$
- d) $(-6; 4), (-2; 4), (-2; 8), (3; 5)$

Solución



- 7. Todo elemento del conjunto de salida, tiene una imagen en el conjunto de llegada.
- 1. No existen dos pares ordenados con la misma primera componente, es decir no se repite la componente x en ningún par ordenado.

Para el diseño de un tanque de tratamiento que su centro está ubicado en la posición metros y está representado por la ecuación:

$$x^2 + y^2 - 28y + 180 = 0$$

Determine la media del diámetro del tanque, en metros, que permitirá verificar que la constitución coincida con el diseño.

- a. 4
- b. 8**
- c. 16
- d. 32

Solución

Sí, $x^2 + y^2 - 28y + 180 = 0$ es la ecuación de una circunferencia en forma general es decir $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

Como se necesita el radio de la circunferencia para determinar el diámetro del tanque, es necesario que la ecuación este en su forma ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Donde: Centro de la circunferencia $C(h, k)$ y Radio r

$$x^2 + y^2 - 28y + 180 = 0$$

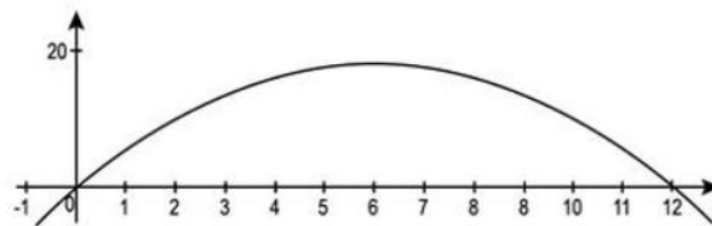
$$x^2 + (y^2 - 28y) = -180 \text{ Completar el trinomio cuadrado perfecto}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 + \left(y^2 - 28y + \left(\frac{28}{2} \right)^2 \right) &= -180 + \left(\frac{28}{2} \right)^2 \\
 x^2 + (y^2 - 28y + 196) &= -180 + 196 \\
 x^2 + (y - 14)^2 &= 16 \\
 (x - 0)^2 + (y - 14)^2 &= 4^2
 \end{aligned}$$

Entonces $r = 4$

Diámetro es el doble 8

En un centro deportivo se estudia la trayectoria de un balón de futbol para determinar los efectos del viento en su movimiento y se logra determinar su curva mediante la gráfica:



Analíticamente la función $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 6x$

Donde:

$f(x)$: es la altura en metros

(x) : es la distancia en el eje horizontal

Determine el conjunto total de valores de la altura de la trayectoria de la distancia en el eje horizontal solo puede tener valores en el intervalo

- a) $[0; 6]$
- b) $[0; 18]$
- c) $[0; 20]$
- d) $[0; 17]$

Solución

Hallar el vértice de la función: $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 6x$

$$Vx = -\frac{b}{2a}$$

$$Vx = -\frac{6}{2\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad Vx = 6$$

$$Vy = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

$$Vy = -\frac{6^2}{2} + 6(6),$$

$$Vy = 18$$

Determine la descomposición de los factores de la expresión algebraica

a) $(x + a)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

b) $(x + a)(x + 2)(x^2 + 2x + 4)$

c) $(x + a)(x - 2)(x^2 - 2x + 4)$

d) $(x + a)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

Solución

$$x^4 + ax^3 + 8x + 8a$$

$$(x^4 + ax^3) + (8x + 8a)$$

$$x^3(x + a) + 8(x + a)$$

$$(x + a)(x^3 + 8)$$

$$(x + a)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

Para comprobar las leyes de la potenciación, en profesor propone tres ejemplos en los cuales se cumple la igualdad. Tomando en cuenta que las leyes de los exponentes sirven para cualquier valor de la base y del exponente, los ejemplos cumplen las leyes de la potenciación, excepto:

a) $2^3 \cdot (-2)^3 = (2 \cdot (-2))^3$

b) $2^3 + (-2)^3 = (2 + (-2))^3$

c) $3^2 \cdot 3^{-2} = 3^{2+(-2)}$

Solución

$2^3 \cdot (-2)^3 = (2 \cdot (-2))^3$ Multiplicación de potencias de igual exponente

$2^3 + (-2)^3 = (2 + (-2))^3$ No aplica la propiedad

$3^2 \cdot 3^{-2} = 3^{2+(-2)}$ Multiplicación de potencias de igual base

Para la adquisición de nueva mercadería, una juguetería realizó un análisis de las edades de 10 niños de una comunidad, obteniendo los datos de la tabla:

Edades (x_i)	Número de niños (f_i)	($x_i \cdot f_i$)	($x_i - \bar{x}$)	($x_i - \bar{x}$) ²
3	3	9	0,5	0,25
4	2	8	1,5	2,25
2	3	6	-0,5	0,25
1	2	2	-1,5	0,25
	10	25		5

Con base a los datos determina la varianza

- a. $\frac{1}{2}$
- b. $\sqrt{\frac{1}{2}}$
- c. $\sqrt{\frac{5}{2}}$
- d. $\frac{5}{2}$

Solución

Para calcular la varianza se usa

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \cdot f_i}{N}$$

Por lo que se necesita completar la tabla de información

Edades (x_i)	Número de niños (f_i)	$(x_i \cdot f_i)$	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
3	3	9	0,5	0,25	0,75
4	2	8	1,5	2,25	4,5
2	3	6	-0,5	0,25	0,75
1	2	2	-1,5	0,25	0,50
	10	25		5	6,5

Reemplazamos los datos

$$\sigma^2 = \frac{13}{10} = \frac{13}{20}$$

El ejercicio está mal planteado

En un laboratorio de transferencia de calor se realizan dos mediciones de temperatura mediante un intercambiador de calor y , en donde se obtuvo un sistema de relación lineal de las temperaturas como se indica

$$3t_1 - 2t_2 = -12$$

$$5t_1 + 4t_2 = 2$$

Si la temperatura se mide en grados centígrados se obtiene que t_1 es ____ y t_2 es ____ respectivamente

a. -9;2

b. -2;3

c. 2;9

d. 3;-2

Solución

$$\begin{aligned} 3t_1 - 2t_2 &= -12 && \text{Multiplicar por 2} \\ 5t_1 + 4t_2 &= 2 \end{aligned}$$

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 6t_1 - 4t_2 &= -24 \\ 5t_1 + 4t_2 &= 2 \\ \hline 11t_1 &= -22 \\ t_1 &= -2 \end{aligned}$$

$$3(-2) - 2t_2 = -12$$

$$-2t_2 = -12 + 6$$

$$t_2 = 3$$

Durante el diseño de un parlante se determinó que la ganancia mínima está en función de la frecuencia f y corresponde a la fórmula:

$$\log_f \left(\frac{2+f}{3-f} \right) = -3$$

Si para resolver la ecuación se aplica el concepto de logaritmo, se obtendrá la expresión _____ que es el equivalente exponencial

a) $(-3)^f = \left(\frac{2+f}{3-f} \right)$

b) $\left(\frac{2+f}{3-f} \right)^{-3} = f$

c) $\left(\frac{2+f}{3-f} \right)^3 = f$

d) $\frac{1}{f^3} = \left(\frac{2+f}{3-f} \right)$

Solución

La relación entre logaritmo y exponencial $a = b^c \rightarrow \log_b a = c$

$$\log_f \left(\frac{2+f}{3-f} \right) = -3$$

$$\left(\frac{2+f}{3-f} \right) = f^{-3}$$

$$\left(\frac{2+f}{3-f} \right) = \frac{1}{f^3}$$

Si la función $h(t) = 2t + 5$ representa el llenado de un tanque de almacenamiento de leche para $0 \leq t < 10$, ¿Qué afirmación es correcta?

- a. Para un tiempo de llenado de 0 a 8 min, la altura varía en el intervalo de $[5;21]$ metros
- b. Para un tiempo de llenado de 0 a 8 min, la altura varía en el intervalo de $]5;21[$ metros
- c. Para un tiempo de llenado de 0 a 10 min, la altura varía en el intervalo de $[5;25]$ metros
- d. Para un tiempo de llenado de 0 a 10 min, la altura varía en el intervalo de $]5;21[$ metros

Solución

El enunciado $h(t) = 2t + 5$ habla de la función que representa el llenado de un tanque en el intervalo $[0; 10[$ de tiempo.

- De 0 a 8 min

$$h(t) = 2t + 5$$

$$h(0) = 2(0) + 5$$

$$h(0) = 5$$

$$h(t) = 2t + 5$$

$$h(8) = 2(8) + 5$$

$$h(8) = 21$$

$[5; 8]$ va cerrado en los dos casos por que el 0 y 8 incluyen en el intervalo $[0; 10]$

- De 0 a 10 min

$[5; 25]$ Va abierto en 0 porque se lo incluye en el intervalo y abierto en 10 ya que no lo incluye

$$h(t) = 2t + 5$$

$$h(0) = 2(0) + 5$$

$$h(0) = 5$$

$$h(t) = 2t + 5$$

$$h(10) = 2(10) + 5$$

$$h(10) = 25$$

[5; 25] Va abierto en 0 porque se lo incluye en el intervalo y abierto en 10 ya que no lo incluye

En una línea de producción de jabones se tiene que el primer lote de unidades es x ; el segundo, $x + 3$ y el tercero, $x + 6$. Si el total de jabones corresponde a la suma del doble de unidades del último lote más 6, determinar las unidades del primer lote.

- a. 3
- b. 9**
- c. 21
- d. 27

Solución

Datos:

Primer lote x

Segundo lote $x + 3$

Tercer lote $x + 6$

$$2(x + 6) + 6 = x + (x + 3) + (x + 6)$$

$$2x + 12 + 6 = x + x + 3 + x + 6$$

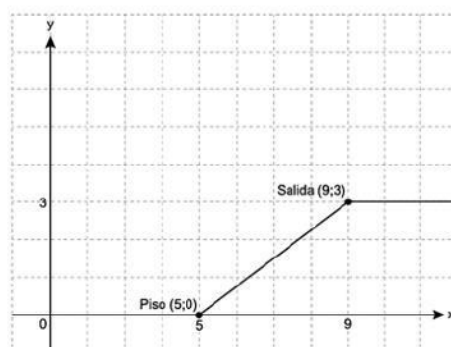
$$2x + 18 = 3x + 9$$

$$2x - 3x = 9 - 18$$

$$-x = -9$$

$$x = 9$$

Un arquitecto está realizando el diseño de la rampa de salida de un estacionamiento, ubicado en el subsuelo de un edificio. En el plano del vista de alzado de estacionamiento se indica que la rampa debe iniciar en el punto (5; 0) metros y los vehículo deben ascender hasta el punto (9; 3) metros, como se muestra en la figura, donde el eje de las abscisas representa el piso y el eje de la ordenadas la altura, identifique la ecuación paramétrica de la recta que el arquitecto deberá emplear para representar la rampa en el plano.



a) $(x; y) = (5; 0) + t(4; 3)$

b) $(x; y) = (5; 0) + t(-4; -3)$

c) $(x; y) = (9; 3) + t(4; 3)$

d) $(x; y) = (9; 3) + t(-4; -3)$

Solución

Se sabe que la ecuación paramétrica tiene la forma $(x; y) = (P_1, P_2) + t(V_1, V_2)$

Donde:

(P_1, P_2) Coordenadas del punto de origen

(V_1, V_2) Vector directriz

Se obtiene como dato el punto de origen $(5; 0)$

Vector directriz $(V_1, V_2) = (9, 3) - (5; 0)$

$$(V_1, V_2) = (4, 3)$$

Reemplazar en la forma paramétrica

$$(x; y) = (P_1, P_2) + t(V_1, V_2)$$

$$(x; y) = (5, 0) + t(4, 3)$$

Dos cables de una torre de telecomunicaciones A y B se disponen como se muestra en la figura. El cable A sigue la ecuación $2y - 6x + 1 = 0$ y el cable B la ecuación $ay - 9x - 2 = 0$. Para que los cables sean paralelos, el valor de a debe ser:

a. -27

b. -3

c. 3

d. 27

Solución

Despejamos y en las dos ecuaciones

$$2y - 6x + 1 = 0 \quad ay - 9x - 2 = 0$$

$$2y = 6x - 1 \quad ay = 9x + 2$$

$$y = \frac{6x}{2} - \frac{1}{2} \quad y = \frac{9x}{a} + \frac{2}{a}$$

$$y = 3x - \frac{1}{2}$$

Iguamos el valor de las pendientes

$$\frac{9}{a} = 3$$

$$a = 3$$

Complete el enunciado.

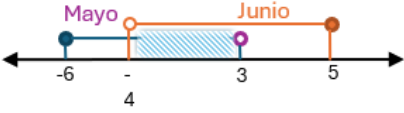
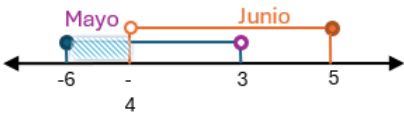
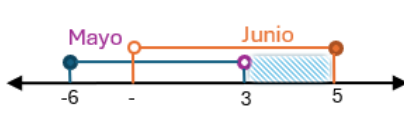
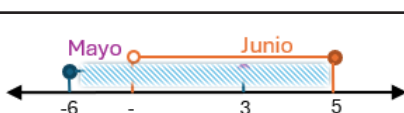
El reporte de la variación de la temperatura en las faldas del Cotopaxi genero los siguientes resultados en °C:

- Durante el mes de mayo fue de $[-6; 3)$
- Durante el mes de junio fue de $(-4; 5]$

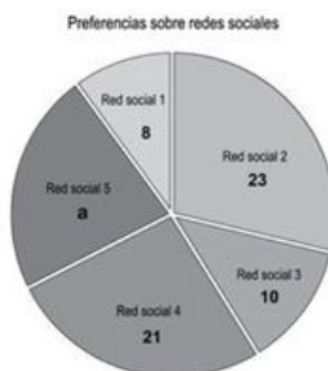
Si en la página web se publica el rango $[-6; -4]$, este hace referencia a la. ____ con los datos recopilados

- Intersección mayo y junio
- Resta mayo menos junio
- Resta junio menos mayo
- Unión entre junio y mayo

Solución

Intersección mayo y junio		Sol. $]-4; 3[$
Resta mayo menos junio		Sol. $[-6; -4]$
Resta junio menos mayo		Sol. $[3; 5]$
Unión entre junio y mayo		Sol. $[-6; 5]$

En una encuesta realizada a un grupo de personas sobre la preferencia de redes sociales, se obtuvo la información que se muestra en el diagrama de pastel. En este gráfico no se conoce el dato de la red social 5.



¿Qué afirmación es correcta?

- a) Si $8 \leq a \leq 21$, entonces la unión de frecuencias de la red social 1, 3 y 5 es mayor a la de la frecuencia de la red social 2 y 4
- b) Si $8 \leq a \leq 21$, entonces la unión de frecuencias de la red social 1, 4 y 5 es mayor a la de la frecuencia de la red social 2 y 3**
- c) Si $a > 23$, entonces la red social 2 es la más utilizada.
- d) Si $a < 8$, entonces la red social 1 es la menos utilizada

Solución

Analizar cual no es la correcta

- a) Consideramos que el valor de $a = 21$
 $8 + 10 + 21 > 23 + 21$
 $39 > 44$ *falso*
- b) Consideramos que el valor de $a = 21$
 $8 + 21 + 21 > 23 + 10$
 $50 > 33$ *verdadero*
- c) Consideramos $a = 24$
 $24 > 23$ *falso*
- d) Consideramos $a = 7$
 $7 > 8$ *falso*

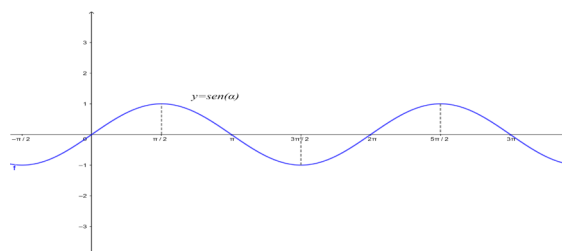
Complete el enunciado.

Al realizar estudios en las mareas producidas por el cambio climático, se estableció que una ola está dada mediante la función: $f(x) = \frac{\text{sen}(x) - 5}{\text{sen}(x) - 2}$

Si el fondo marino es considerando como punto de referencia, la ola ha alcanzado una altura de _____ metros durante el estudio.

- a. 2
- b. 4**

Solución



Se observa en la gráfica de la función **sen** el punto más alto que puede tomar es

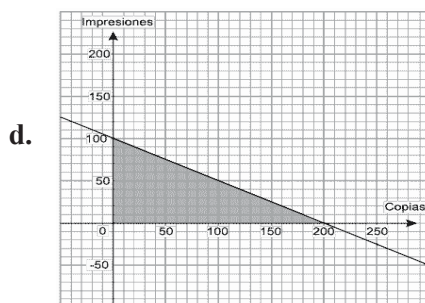
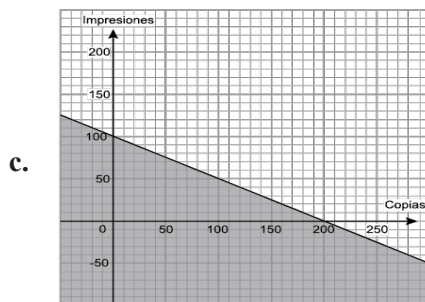
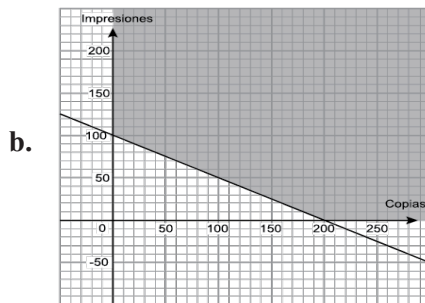
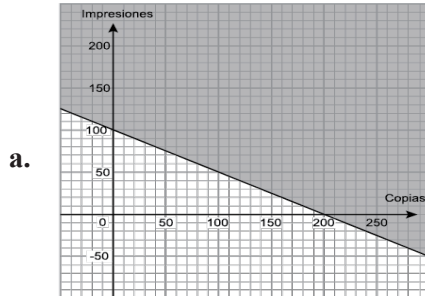
$$1 = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Reemplazar valores

$$f(x) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 5}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2}$$

$$f(x) = \frac{1 - 5}{1 - 2} = \frac{-4}{-1} = 4$$

Un grupo de amigos han decidido emprender un negocio de copiado e impresiones cerca de la universidad principal de la ciudad. Establecieron que cada copia tendrá un costo de 5 centavos y cada impresión un costo de 10 centavos. Si para asegurar sus gastos mensuales deben recaudar al menos USD 10 por día, identifique la región que permite cumplir con la recaudación solicitada.



Solución

Función objetivo

$$0,05x + 0,10y \geq 10$$

Considerando la restricción de $x \geq 0$ y $y \geq 0$, ya descartamos el literal a y c

Para verificar utilizamos un punto del área sombreada para comprobación P (0;0)

Reemplazar en

$$0,05x + 0,10y \geq 10$$

$$0,05(0) + 0,10(0) \geq 10$$

$$0 \geq 10 \text{ falso}$$

Como el punto P (0;0) no pertenece al conjunto solución se pinta sobre la línea, quedando como resultado el literal b

En un partido de fútbol, el balón describe, en dos ocasiones, trayectorias diferentes, según las funciones:

Caso	Trayectoria
A	$y = -x^2 + 4x + 5$
B	$y = -x^2 + 6x + 1$

Si el eje de las abscisas coincide con el nivel del suelo del campo de fútbol, determine el caso en el que el balón alcanza la altura máxima.

- a. Caso A
- b. Caso B

Solución

Las funciones A y B corresponden a parábolas, para encontrar la altura máxima, se determina el vértice $V(h; k)$.

$$h = \frac{-b}{2a}$$

$$k = f(h)$$

Parábola A

$$y = -x^2 + 4x + 5$$

$$h = \frac{-4}{2(-1)}$$

$$h = 2$$

$$k = -(2)^2 + 4(2) + 5$$

$$k = 9$$

$$V(2; 9)$$

Parábola B

$$y = -x^2 + 6x + 1$$

$$h = \frac{-6}{2(-1)}$$

$$h = 3$$

$$k = -(3)^2 + 6(3) + 1$$

$$k = 10$$

$$V(3; 10)$$

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Ceron, M., y Reyes, R. (2009). *Geometría y Trigonometría*. Pearson Educación de México, SA de CV.

Banco de Preguntas y Respuestas Ser Bachiller 2020 INEVAL Formas Resueltas 2021. (s. f.). Recuperado 28 de octubre de 2020, de

<https://educacionecuadorministerio.blogspot.com/2017/05/banco-de-preguntas-y-respuestas-ser-bachiller-2017-ineval.html>

Bastidas, P., Lozano, E., Coronel, M., y Montenegro, C. (2016). *Sistemas Numéricos*. Ediciones Ecuafuturo.

Correa, R. (2017). REGLAMENTO GENERAL A LA LEY ORGÁNICA DE EDUCACIÓN INTERCULTURAL.

Espinoza Ramos, E. (2012). *Análisis matemático 1* (3° edición). Ediciones edukperú.

Gonzáles, O., y Mancill, D. (1962). *Álgebra Elemental Moderna* (Vol. 1). KAPELUSZ S.A.

Ineval. (s. f.-a). *Resultados Nacionales*. Evaluaciones. Recuperado 15 de julio de 2020, de <http://www.evaluacion.gob.ec/evaluaciones/nacional/>

Ineval. (s. f.-b). *Resultados Provincias*. Evaluaciones. Recuperado 15 de julio de 2020, de <http://www.evaluacion.gob.ec/evaluaciones/provincias/>

Ineval. (2017). *Resultados Ser Bachiller*. <https://www.evaluacion.gob.ec/resultados-ser-bachiller-regimen-costa-2017-2018/>

Ineval. (2019). Informe de resultados nacional Ser Bachiller. <http://www.evaluacion.gob.ec/evaluaciones/nacional/>

Ineval. (2020a). *Ficha Técnica 20.pdf*. admisión.senescyt.gob.ec. http://admisión.senescyt.gob.ec/media/2019/12/DMEE_SBAC20_20191126_fichtec.pdf

Ineval. (2020b, octubre 7). *Archivos—Ineval®2016*. <http://soporte.evaluacion.gob.ec/arca/index.php/s/LygkYpTZrvfJD4m>

Lehmann, C. (1989). *Geometría Analítica*. Uteha.

MinEduc. (2016). *Estándares de Aprendizaje*. educacion.gob.ec. https://educacion.gob.ec/wpcontent/uploads/downloads/2017/05/Estandares_de_Aprendizaje.pdf

MinEduc. (2019). *Currículo de los Niveles de Educación Obligatoria* (Vol. 2). Ministerio de Educación del Ecuador. <https://educacion.gob.ec/wpcontent/uploads/downloads/2019/09/BGU-tomo-2.pdf>

Simulador EXAMEN EAES 2020. (s. f.). Examen EAES. Recuperado 28 de octubre de 2020, de <https://eaes.ec/simulador>

Vallejo, P., y Zambrano, J. (2001). *Física Vectorial* (Tercera). Grafiti Ofssett.

Vargas, A. (1995). *Estadística descriptiva e inferencial*. Univ. de Castilla La Mancha.

AUTORES



MGTR. PINTADO CALVA ANDREA MICHELLE

Unidad Educativa Juan Pío Montufar

andreamichellepintado@hotmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-9971-1421>

Magíster en Pedagogía de las Ciencias Experimentales con mención en Física y Matemática por la Pontificia Universidad Católica del Ecuador, y Licenciada en Ciencias de la Educación en la misma especialidad por la Universidad Central del Ecuador. Con cinco años de trayectoria en el ámbito docente, imparte las asignaturas de Matemática y Física en el nivel secundario. Su enfoque académico e investigativo se centra en la didáctica aplicada a las ciencias exactas, orientándose hacia el desarrollo e implementación de metodologías de enseñanza que transforman el aprendizaje abstracto en experiencias formativas accesibles, dinámicas e integrales. Su labor profesional combina un sólido rigor conceptual con un constante compromiso por la innovación pedagógica y la renovación de la práctica educativa en el aula.



MGTR. CUMBAL TOAPANTA PABLO STALIN

Unidad Educativa Natalia Jarrin de Espinosa

stalyinpo@outlook.com

<https://orcid.org/0009-0009-5079-2716>

Licenciado en Ciencias de la Educación, mención Matemática y Física, por la Universidad Central del Ecuador, donde inició su ejercicio docente en 2021. Posteriormente, obtuvo el título de Magíster en Pedagogía de las Ciencias Experimentales con la misma mención por la Pontificia Universidad Católica del Ecuador, fortaleciendo su perfil disciplinar y pedagógico.

Cuenta con aproximadamente cuatro años de experiencia educativa, habiendo ejercido en la Unidad Educativa Domingo Savio de Cayambe y, actualmente, en la Unidad Educativa Natalia Jarrín de Espinoza. Su trayectoria se complementa con procesos de formación continua enfocados en el aprendizaje significativo.

Su interés profesional se orienta hacia la innovación pedagógica y el desarrollo de recursos didácticos que permitan comprender los conceptos matemáticos de forma clara y contextualizada. Esta obra refleja su compromiso por contribuir al proceso de enseñanza mediante contenidos accesibles y aplicables.



LCDO. CÓNDO R PÉREZ PATRICIO GERMÁN

Unidad Educativa Santa D. María Mazzarello

patriciocondorperez11@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0005-9175-7985>

Licenciado en Ciencias de la Educación, mención Matemática y Física, por la Universidad Central del Ecuador. Actualmente cursa la Maestría en Maestría en Educación con mención en Docencia e Investigación En Educación Superior, en la Universidad Casa Blanca. En el ámbito profesional, se desempeña como Coordinador del Área de Ciencias Exactas y Robótica y docente en la Unidad Educativa Santa María Mazzarello. Su trayectoria combina el liderazgo pedagógico, la gestión curricular y la enseñanza de las ciencias exactas. En esta obra aporta su experiencia práctica en el aula y su visión directiva para el desarrollo de nuevas metodologías educativas.



MGTR. QUEVEDO CASTRO ERICK ANDRÉS

Unidad Educativa Particular Jim Irwin

q.erick@hotmail.com

<https://orcid.org/0009-0008-0913-9814>

Profesional del ámbito educativo, con experiencia en la enseñanza de Matemática y Física y en el diseño de procesos de aprendizaje interdisciplinarios. Su trayectoria docente se ha caracterizado por la implementación de metodologías activas, proyectos STEAM, innovación educativa y estrategias orientadas al desarrollo del razonamiento lógico y las competencias matemáticas. Ha trabajado con estudiantes de Educación General Básica y Bachillerato, promoviendo aprendizajes significativos mediante la integración de tecnología, robótica, gamificación y neurodidáctica, así como también director del área de Matemática de la institución de trabajo. Cuenta con formación de posgrado en STEAM, neurodidáctica y gamificación, y ha participado en iniciativas de nivelación académica y preparación preuniversitaria, contribuyendo al fortalecimiento integral de los estudiantes y su proyección académica.

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\log_a b = \frac{1}{r} \log_a b$$

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

$$\sin x = a; \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = p \cdot r$$

$$\operatorname{tg} x = a; \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n$$

Dominio Matemático es una obra didáctica dirigida a estudiantes que se preparan para rendir evaluaciones de ingreso a la educación superior y desean fortalecer sus conocimientos, habilidades y estrategias para resolver problemas matemáticos.

El libro presenta conceptos esenciales, procedimientos explicados paso a paso, ejercicios resueltos y actividades propuestas que permiten consolidar el aprendizaje mediante la práctica. Sus contenidos comprenden álgebra y funciones, geometría y medida, estadística y probabilidad, tomando como referencia los estándares de aprendizaje y las destrezas con criterio de desempeño del currículo educativo ecuatoriano.

A lo largo de la obra, el estudiante encontrará recursos para comprender expresiones algebraicas, ecuaciones, matrices, funciones, vectores, curvas planas, programación lineal y análisis estadístico, entre otros temas fundamentales. Cada apartado favorece el razonamiento lógico, la interpretación de datos y la aplicación de conocimientos en situaciones académicas y cotidianas.

Más que un compendio de fórmulas, este libro constituye una herramienta práctica de preparación, nivelación y consulta, diseñada para acompañar al estudiante en el desarrollo progresivo de su dominio matemático y brindarle mayor seguridad frente a los desafíos de la educación superior.